CDL - Soluções para a Prova 1

Turma A, Licenciatura em Física

22 de março de 2010

Prof. Fernando Deeke Sasse
Departamento de Matemática, UDESC - Joinville

1 Determinar a curva que passa pelo ponto (2,1) e possui em cada um de seus pontos o coeficiente angular $-x/4y$.

Solução: Resolver este problema consiste em resolver o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y}\,, \qquad y(2) = 1\,. \tag{1}$$

Separando variáveis e integrando ambos os lados da equação encontramos

$$2y^2 + \frac{x^2}{2} = C\,. \tag{2}$$

Substituindo a condição inicial em (2) obtemos $C = 4$, de modo que solução particular é

$$2y^2 + \frac{x^2}{2} = 4\,. \tag{3}$$

2 Resolva o problema de valor inicial

$$2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\,, \quad y(1) = 1. \tag{4}$$

Em que região do plano xy uma solução da equação diferencial garantidamente existe e é única?

Solução: Reescrevendo a eq. (4) na forma

$$y' - \frac{y}{2x} = -\frac{x}{2}y^{-2} \tag{5}$$

vemos que esta é uma equação diferencial de Bernoulli. Dividindo (5) por y^{-2} obtemos

$$y^2y' - \frac{y^3}{2x} = -\frac{x}{2}\,. \tag{6}$$

Definindo uma nova função desconhecida $u = y^3$ temos $u' = 3y^2y'$, de modo que (6) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{3}u' - \frac{u}{2x} = -\frac{x}{2} \tag{7}$$

ou

$$u' - \frac{3}{2x}\, u = -\frac{3x}{2}\,, \tag{8}$$

que é uma equação linear. Buscamos uma solução da forma $u = wv$, onde

$$v = \exp\left[-\int\left(-\frac{3}{2x}\right)dx\right] = \exp\left(\frac{3}{2}\ln x\right) = x^{3/2} \tag{9}$$

e

$$w = \int \frac{(-3x/2)}{x^{3/2}}\, dx = -3\sqrt{x} + C\,, \tag{10}$$

onde C é uma constante arbitrária. Portanto, a solução geral é

$$y^3 = u = x^{3/2}\left(-3\sqrt{x} + C\right)\,. \tag{11}$$

Usando a condição inicial obtemos

$$y(1)^3 = 1 = -3 + C \quad \Rightarrow \quad C = 4\,, \tag{12}$$

de modo que a solução particular é dada por

$$y^3 = x^{3/2}\left(-3\sqrt{x} + 4\right) \tag{13}$$

Consideremos a questão da existência e unicidade da solução. Reescrevendo a equação diferencial na forma $y' = f(x, y)$ notamos que como

$$f = \frac{y}{2x} - \frac{x}{2y^2}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2x} + \frac{x}{y^3} \tag{14}$$

o teorema de existência e unicidade garante que a solução existe e é única em todos os pontos do plano xy onde $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

3 A massa de um determinado material radioativo decresce a uma taxa proporcional à quantidade presente em qualquer tempo. Sua meia-vida é de 4,5 horas. Se uma massa de 3g deste material está presente inicialmente, quanto tempo levará para 99% do material desaparecer?

Solução: O processo de decaimento é governado pela equação

$$\frac{dM}{M} = -kM\,, \tag{15}$$

de modo que

$$\int \frac{dM}{M} = -k \int dt\,, \tag{16}$$

ou seja,

$$M = M_0 \mathrm{e}^{-kt}\,. \tag{17}$$

Da condição inicial $M(0) = M_0 = 3\,g$ temos

$$M(t) = 3\,\mathrm{e}^{-kt}\, g\,. \tag{18}$$

Para determinar k usamos o fato de que

$$M(t_{1/2}) = \frac{M_0}{2} = M_0\,\mathrm{e}^{-kt_{1/2}}\,, \tag{19}$$

onde $t_{1/2} = 4.5h$. Portanto,

$$k = -\frac{1}{4.5}\ln 2\,h^{-1} \approx 0.154\,h^{-1}. \tag{20}$$

O decaimento da massa ocorre então de acordo com a relação

$$M(t) = 3\,\mathrm{e}^{-0.154t}\,g\,. \tag{21}$$

Seja t_{99} o tempo necessário para que 99% da massa desapareça. Então

$$M(t_{99}) = 0.01M_0 = 3\mathrm{e}^{-0.154t_{99}} \tag{22}$$

de modo que $t_{99} = 29.9h$.

4 Um termômetro é retirado de dentro de uma sala e colocado do lado de fora, onde a temperatura é de 10 °C. Após 1 min. o termômetro marcava 20 °C. Após 5 minutos, 16 °C. Qual a temperatura da sala ? Use a lei de resfriamento de Newton, que estabelece que a taxa de variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente.

Solução: A lei de resfriamento de Newton estabelece que

$$\frac{dT}{dt} = -\kappa(T - \Theta)\,, \tag{23}$$

onde T é a temperatura do corpo, Θ é a temperatura ambiente e $\kappa > 0$ é a constante de resfriamento. Esta equação linear tem solução

$$T(t) = \Theta + C\mathrm{e}^{-\kappa t}\,. \tag{24}$$

Queremos determinar $T(0) = \Theta + C$. Sabemos que

$$T(1) = 20 = 10 + C\mathrm{e}^{-\kappa}\,, \qquad T(5) = 16 = 10 + C\mathrm{e}^{-\kappa 5}\,, \tag{25}$$

de modo que

$$\kappa = \frac{ln5/3}{4} \approx= 0.128\,, \qquad C = 10\mathrm{e}^{k} \approx 11.36\,. \tag{26}$$

Portanto, a temperatura da sala é:

$$T(0) = 10 + C \approx 21.36°\mathrm{C}\,. \tag{27}$$

5 Determine uma solução da equação diferencial $(3x^2 - y^2)y' - 2xy = 0$.

Solução:
Esta equação pode ser reescrita como

$$y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2} = \frac{2y/x}{2 - y^2/x^2}\,, \tag{28}$$

o que mostra que esta equação é homogênea. Definindo uma nova função desconhecida $u = y/x$, temos

$$y = ux\,, \qquad y' = u'x + u\,, \tag{29}$$

de modo que a eq. (28) toma a forma

$$u'x + u = \frac{2u}{3 - u^2} \tag{30}$$

ou

$$\frac{dx}{x} = \frac{u^2 - 3}{u(u^2 + 1)} du\,. \tag{31}$$

Integrando ambos os lados obtemos

$$\ln\left[(u + 1)^2/u^3\right] = \ln(Cx)\,, \tag{32}$$

onde C é uma constante arbitrária. Portanto,

$$\frac{u^2 + 1}{u^3} = Cx \tag{33}$$

ou

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = C\,\frac{y^3}{x^2}\,. \tag{34}$$

6 Determine a equação diferencial que determina o movimento vertical de um corpo sob a ação do campo gravitacional da Terra. A equação diferencial deve ser dada em termos da velocidade, do raio da Terra R, da altura do corpo em relação à superfície x, da aceleração da gravidade na superfície da Terra g e da massa m do corpo. A força sobre o corpo é dada pela lei de Newton da gravitação universal, $F = -GMm/r^2$, onde G é a constante universal da gravitação, M é a massa da terra e r a distância do corpo ao centro da Terra (supomos positiva a direção associada a r crescente). Suponha que a atmosfera exerce uma força dissipativa sobre o corpo que é proporcional à velocidade do corpo.

Solução:

Sejam m a massa do corpo, x a altura do corpo acima da superfície, γ a constante de resistência do ar, M a massa da Terra e R seu raio. Da segunda lei de Newton e da lei da Gravitação Universal de Newton temos

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{GMm}{(x + R)^2} - \gamma v\,, \tag{35}$$

ou

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\,v = -\frac{GM}{(x + R)^2} - \gamma v\,. \tag{36}$$

Notemos que na superfície ($x = 0$), se g é a aceleração da gravidade da Terra, temos

$$mg = -\frac{GMm}{R^2}\,, \tag{37}$$

ou seja,

$$GM = gR^2\,. \tag{38}$$

Portanto podemos escrever a eq. (36) na forma

$$v\,\frac{dv}{dx} + \frac{\gamma}{m}v = \frac{gR^2}{(x + R)^2}\,. \tag{39}$$