

# EDI - Soluções para a Prova 1

Turma B, Engenharia Elétrica

25 de março de 2010

Prof. Fernando Deeke Sasse

Departamento de Matemática, UDESC - Joinville

1 Inicialmente  $100\text{mg}$  de uma substância radioativa é presente. Depois de  $6\text{h}$  a massa decresceu  $4\%$ . Determine a massa da substância após  $24\text{h}$  e sua meia-vida.

## Solução:

O processo de decaimento é governado pela equação

$$\frac{dM}{M} = -kM, \quad (1)$$

de modo que

$$\int \frac{dM}{M} = -k \int dt, \quad (2)$$

ou seja,

$$M = M_0 e^{-kt}. \quad (3)$$

Da condição inicial  $M(0) = M_0 = 100\text{mg}$  temos

$$M(t) = 100e^{-kt}. \quad (4)$$

Para determinar  $k$  usamos o fato de que

$$M(6) = 0.96M_0 = 96\text{mg} = 100e^{-k6}\text{mg}. \quad (5)$$

Então

$$k = -\frac{1}{6} \ln 0.96\text{h}^{-1} \approx 0.00680\text{h}^{-1}. \quad (6)$$

O decaimento da massa ocorre então de acordo com a relação

$$M(t) = 100e^{-0.00680t}\text{mg}. \quad (7)$$

Para  $t = 24\text{h}$  temos

$$M(24) = 100e^{-(0.00680)(24)}\text{mg} = 84,93\text{mg}. \quad (8)$$

A meia-vida é o tempo  $t_{1/2}$  necessário para que a massa inicial se reduza à metade:

$$M(t_{1/2}) = \frac{M_0}{2} = M_0 e^{-kt_{1/2}}, \quad (9)$$

ou seja,

$$e^{-kt_{1/2}} = \frac{1}{2}. \quad (10)$$

Portanto,

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} = 101.88\text{h}. \quad (11)$$

**2** Uma tensão de  $220V$  é aplicada a um circuito em série LR durante  $30s$ . A indutância é  $L = 20H$  e a resistência  $R = 3\Omega$ . Considere  $t = 0$  o instante em que a tensão começa a ser aplicada. Determine a corrente  $I(t)$  se  $I(0) = 0$ .

**Solução:**

Da lei de Kirchhoff temos

$$L \frac{dI}{dt} + RI = V(t), \quad (12)$$

onde

$$V(t) = \begin{cases} 220 & 0 < t < 30, \\ 0 & 1 \leq t > 30. \end{cases} \quad (13)$$

Para  $0 < t \leq 30$  temos

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 220, \quad (14)$$

ou

$$\frac{dI}{dt} + \frac{3}{10}I = 11. \quad (15)$$

Como esta é uma equação linear buscamos uma solução da forma  $I = uv$ , onde

$$v = e^{-3/20t}, \quad u = \int e^{3/20t} dt + C, \quad (16)$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária. Portanto,

$$I(t) = Ce^{-3/20t} + \frac{220}{3}. \quad (17)$$

Da condição inicial temos

$$I(0) = 0 = C + 220/3, \quad (18)$$

$$C = -220/3. \quad (19)$$

Portanto,

$$I(t) = \frac{220}{3} (1 - e^{-3/20t}), \quad 0 \leq t < 30. \quad (20)$$

Para  $t > 30$  temos

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0, \quad (21)$$

de modo que

$$I(t) = I_0 e^{-3/20t}. \quad (22)$$

Devemos agora impor uma condição de continuidade em  $t = 30$ :

$$I(30) = \frac{220}{3} (1 - e^{(-3/20)30}) = I_0 e^{(-3/20)30}, \quad (23)$$

de modo que

$$I_0 = 6527,92 \quad (24)$$

e

$$I(t) = 6527,92 e^{(-3/20)t}, \quad t > 30. \quad (25)$$

**3** Determine a solução das equações

$$(i) 6xy dx + (4y + 9x^2) dy = 0. \quad (26)$$

e

$$(ii) y dy + (-x + \sqrt{x^2 + y^2}) dx = 0. \quad (27)$$

**Solução:**

(i) Sejam

$$M = 6xy, \quad N = 4y + 9x^2. \quad (28)$$

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 18x \quad (29)$$

a equação não é exata. Tentaremos determinar um fator integrante  $\mu$  tal que

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}. \quad (30)$$

Suponhamos que  $\mu = \mu(y)$ . A eq. (30) torna-se

$$\frac{\partial d\mu}{dy} M + \mu \frac{\partial(M)}{\partial y} = \mu \frac{\partial(N)}{\partial x} \quad (31)$$

ou

$$\frac{d\mu}{\mu} = 2 \frac{dy}{y}, \quad (32)$$

de modo que  $\mu = y^2$ . A equação  $\bar{M}dx + \bar{N}dy = 0$  agora é exata, onde

$$\bar{M} = 6xy^3, \quad \bar{N} = 4y^3 + 9x^2y^2. \quad (33)$$

A determinação da solução consiste em encontrar a solução  $F = const.$  tal que

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0. \quad (34)$$

Devemos ter

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \bar{M} = 6xy^3, \quad (35)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \bar{N} = 4y^3 + 9x^2y^2. \quad (36)$$

Integrando (35) temos

$$F = 3x^2y^3 + C(y). \quad (37)$$

Diferenciando a eq. (37) com relação a  $y$  e igualando a (36) obtemos

$$\frac{dC(y)}{dy} = 4y^3, \quad C(y) = y^4. \quad (38)$$

Portanto a solução é

$$3x^2y^3 + y^4 = C, \quad (39)$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária.

(ii) A eq. (27) pode ser reescrita como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \sqrt{1 + y^2/x^2}}{y/x}, \quad (40)$$

que é uma equação homogênea. Definindo uma nova função desconhecida  $u = ux$ , temos  $y' = u'x + u$ , de modo que (40) toma a forma

$$u'x + u = \frac{1 - \sqrt{1 + u^2}}{u}, \quad (41)$$

ou, separando as variáveis,

$$\frac{dx}{x} = \frac{udu}{1 - u^2 - \sqrt{1 + u^2}}. \quad (42)$$

Integrando ambos os lados obtemos a solução:

$$\begin{aligned} 3 \ln x = & -\ln(u^2 - 3) - \ln(u) + \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}\right) \\ & + \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2} \frac{-1 + u\sqrt{3}}{\sqrt{1 + u^2}}\right) - \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2} \frac{1 + u\sqrt{3}}{\sqrt{1 + u^2}}\right), \end{aligned} \quad (43)$$

onde  $u = y/x$ .

**4** Um termômetro é retirado de dentro de uma sala e colocado do lado de fora, onde a temperatura é de  $14^\circ\text{C}$ . Após 1 min. o termômetro marcava  $20^\circ\text{C}$ . Após 5 minutos,  $16^\circ\text{C}$ . Qual a temperatura da sala? Use a lei de resfriamento de Newton, que estabelece que a taxa de variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente.

**Solução:** A lei de resfriamento de Newton estabelece que

$$\frac{dT}{dt} = -\kappa(T - \Theta), \quad (44)$$

onde  $T$  é a temperatura do corpo,  $\Theta$  é a temperatura ambiente e  $\kappa > 0$  é a constante de resfriamento. Esta equação linear tem solução

$$T(t) = \Theta + Ce^{-\kappa t}. \quad (45)$$

Queremos determinar  $T(0) = \Theta + C$ . Sabemos que

$$T(1) = 20 = 14 + Ce^{-\kappa}, \quad T(5) = 16 = 14 + Ce^{-\kappa 5}, \quad (46)$$

de modo que

$$\kappa = \frac{\ln 3}{4} \approx 0.2746, \quad C = 6e^{\kappa} \approx 7.896. \quad (47)$$

Portanto, a temperatura da sala é:

$$T(0) = 14 + C \approx 21.9^\circ\text{C}. \quad (48)$$

**4** Um corpo é lançado verticalmente de uma altura  $h$  acima da superfície da Lua. Determine a velocidade de escape do corpo em termos do raio  $R$  da Lua e da aceleração da gravidade  $g$  na sua superfície.

**Solução:**

Sejam  $m$  a massa do corpo,  $x$  a altura do corpo acima da superfície,  $M$  a massa da Lua

e  $R$  seu raio. Da segunda lei de Newton e da lei da Gravitação Universal de Newton temos

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{GMm}{(x+R)^2}, \quad (49)$$

ou

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} v = -\frac{GM}{(x+R)^2}. \quad (50)$$

Notemos que na superfície ( $x = 0$ ), se  $g_L$  é a aceleração da gravidade da Lua, temos

$$mg_L = -\frac{GMm}{R^2}, \quad (51)$$

ou seja,

$$GM = g_L R^2. \quad (52)$$

Portanto podemos escrever a eq. (50) na forma

$$v dv = -g_L R^2 \frac{dx}{(x+R)^2}. \quad (53)$$

Integrando ambos os lados temos

$$\frac{v^2}{2} = \frac{g_L R^2}{x+R} + C, \quad (54)$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária. A velocidade de escape é a velocidade inicial em  $x = h$ ,  $v_0 = v(h)$  tal que  $v(\infty) = 0$ . Devemos usar a condição inicial para determinar  $C$  em termos de  $v_0$ :

$$\frac{v(h)^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} = \frac{g_L R^2}{h+R} + C, \quad (55)$$

de modo que

$$C = \frac{v_0^2}{2} - \frac{g_L R^2}{h+R}. \quad (56)$$

Da eq. (54) temos então

$$v^2 = v_0^2 + 2g_L R^2 \frac{h-x}{(x+R)(h+R)}. \quad (57)$$

A velocidade de escape é determinada por

$$0 = v_{esc}^2 + 2g_L R^2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h-x}{(x+R)(h+R)}, \quad (58)$$

ou seja,

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2g_L}{h+R}} R. \quad (59)$$

**6** Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + 4y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (60)$$

e esboce o gráfico da solução.

**Solução:**

A equação característica é dada por

$$\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0, \quad (61)$$

de modo que

$$\lambda_{\pm} = -2 \pm \sqrt{3}. \quad (62)$$

A solução geral e então dada por

$$y = C_1 e^{\lambda_+ x} + C_2 e^{\lambda_- x}. \quad (63)$$

Por outro lado,

$$y' = C_1 \lambda_+ e^{\lambda_+ x} + C_2 \lambda_- e^{\lambda_- x}. \quad (64)$$

Aplicando as condições iniciais às eqs. (63-64) temos

$$C_1 = -C_2 = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad (65)$$

e a solução é:

$$y(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}} (e^{\lambda_+ x} - e^{\lambda_- x}). \quad (66)$$

O gráfico correspondente a esta solução é mostrado na Fig. 1.

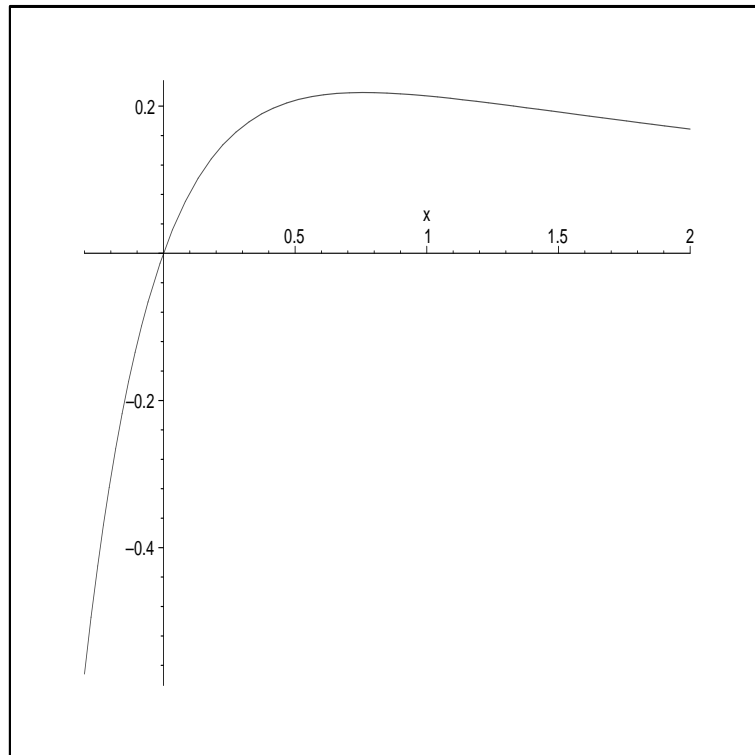


Figura 1: Gráfico da solução (66).