

# Probabilidade e Estatística

EST0003 - A

Prova 2

1. Um lote de 500 peças contém 40 que são defeituosas. 30 peças são selecionadas aleatoriamente e sem substituição.

- (a) Qual é a probabilidade de que a terceira seja defeituosa?
- (b) Qual é a probabilidade de que todas sejam defeituosas?
- (c) Qual é a probabilidade de que ao menos 5 sejam defeituosas?
- (d) Qual a probabilidade de que no máximo 10 sejam defeituosas?

```
[> restart;
[> K := 40: N := 500: n := 30:
[> with(Statistics): with(plots):
[> xmin := max(0, n+K-N); xmax := min(K, n);
                               xmin := 0
                               xmax := 30
```

```
[> P:=x->binomial(K,x)*binomial(N-K,n-x)/binomial(N,n);
                               P := x →  $\frac{\text{binomial}(K, x) \text{binomial}(N - K, n - x)}{\text{binomial}(N, n)}$ 
```

(a)

```
[> PP:=NND+NDD+DDD+DND:
[> den:=500*499*498:
[> NND:= 460*459*40/den:
[> NDD:=460*40*39/den:
[> DDD:=40*39*38/den:
[> DND:=40*460*39/den:
[> evalf(PP);
                               0.08000000000
```

(b)

```
[> P(30.);
                               5.865109182 10-40
```

(c)

```
[> evalf(sum(P(i), i = 6 .. 30));
                               0.02503474906
```

ou

```
[> evalf(1-(sum(P(i), i = 0 .. 5)));
                               0.02503474906
```

(d)

```
[> evalf(sum(P(i), i = 0 .. 10));
                               0.9999960697
```

ou

```

[ > 1-(evalf(sum(P(i), i = 11 .. 30)));
  0.9999960697 (8)

```

2. Suponha que o número de partículas de asbestos em uma amostra de 1cm<sup>2</sup> de poeira é uma variável aleatória de Poisson com uma média 1000. Qual é a probabilidade de que 10cm<sup>2</sup> de poeira contenham mais do que 10 000 partículas?

**Solução**

```

[ > restart;
  > lambda:= 1000*10;
  lambda := 10000 (9)

```

```

[ > P:=x->exp(-lambda)*lambda^(x)/x!;
  P := x -> \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} (10)

```

Convém aqui usar a aproximação normal para a distribuição de Poisson.

```

[ > X := 10000;
  X := 10000 (11)

```

```

[ > Z := (X-lambda)/sqrt(lambda);
  Z := 0 (12)

```

Obviamente,  $P(Z < 0) = 0.5$ ,

3. Um produto eletrônico contém 5000 componentes. Suponha que a probabilidade de que cada componente opere sem falhas durante a vida útil do produto é 0.999 e suponha que as falhas ocorrem de forma independente. Encontre a probabilidade aproximada de que 10 ou mais componentes do produto falhem durante sua vida útil.

**Solução.**

Seja  $X$  a variável aleatória binomial que denota o número de componentes que falham. Então

```

[ > restart;
  > with(Statistics):
  > p := 1-.999: n := 5000:
  > Pb := proc (x) options operator, arrow; binomial(n, x)*p^x*(1-p)
    ^ (n-x) end proc;
  Pb := x -> binomial(n, x) p^x (1 - p)^{n - x} (13)

```

```

[ > 1-(sum(Pb(i), i = 0 .. 9));
  0.0317555195 (14)

```

```

[ >

```

Portanto, a probabilidade de que 10 ou mais componentes do produto falhem é de 3.17%

4. A vida útil de um aparato mecânico em um teste de vibração tem distribuição exponencial, com uma média de 400 horas.

(a) Qual e a probabilidade de que um aparato falhe neste teste em menos de 100 horas?

(b) Qual e a probabilidade de que o aparato funcione por mais de 500 horas antes de falhar?

(c) Se um aparato foi testado por 400 horas sem falhas, qual é a probabilidade de que ele falhe nas próximas 100 horas?

(d) Se 10 aparatos são testados, qual é a probabilidade de que ao menos um falhe em menos de 100 horas? Suponha que os aparatos falham independentemente.

(e) Se 10 aparatos são testados, qual é a probabilidade de que todos falhem em 800 horas? Suponha que os aparatos falham independentemente.

```
> restart;
> f :=(lambda, x) -> lambda*exp(-lambda*x);
      f := (λ, x) → λ e-λx (15)
```

```
> lambda := 1/400;
      λ := 1/400 (16)
```

```
> P(X<100) := evalf(int(f(lambda, x), x = 0 .. 100));
      P(X < 100) := 0.2211992169 (17)
```

(b)

```
> P(X>500) := evalf(int(f(lambda, x), x = 500 .. infinity));
      P(500 < X) := 0.2865047969 (18)
```

(c) O mesmo que no item (a)

(d)

```
> Pb:=x->binomial(n,x)*p^x*(1-p)^(n-x);
      Pb := x → binomial(n, x) px (1 - p)n - x (19)
```

```
> n:=10:p:=0.2211992169:
> 1-Pb(0);
      0.9179150014 (20)
```

(e)

```
> P(X<=800):=evalf(int(f(lambda,x),x=0..800));
      P(X ≤ 800) := 0.8646647168 (21)
```

```
> p:=%:
> Pb(10);
      0.2336024411 (22)
```

5 A resistência compressora de amostras de cimento pode ser modelada por uma distribuição normal com uma média de 6300Kg/cm<sup>2</sup> e desvio padrão de 60Kg/cm<sup>2</sup>.

(a) Qual é a probabilidade de que a resistência de uma amostra seja menor do que 6250Kg/cm<sup>2</sup>?

(b) Qual e a probabilidade de que a resistência de uma amostra esteja entre 6150 e 6350Kg/cm<sup>2</sup>?

(c) Qual é a resistência excedida por 97% das amostras?

```
> restart:
> with(Statistics):
> mu:=6300: sigma:=60:
> X:=RandomVariable(Normal(mu,sigma)):
```

(a)

```
> CDF(X,6250.);
                                0.202328380963643029 (23)
```

```
(b)
> evalf(CDF(X,6350)-CDF(X,6150));
                                0.7914619536 (24)
```

```
(c)
> Quantile(X,0.03);
                                6187.152384 (25)
```

6. Na transmissão de informação digital, a probabilidade de que um sinal que representa um bit tenha uma distorção alta, moderada ou baixa é 0.01, 0.2 e 0.79, respectivamente. Suponha que três sinais são transmitidos e que a quantidade de distorção de cada sinal é independente. Sejam  $X$  e  $Y$  o número de sinais com distorção alta e moderada, respectivamente. Determine  $f_{XY}(x, y)$ ,  $f_X(x)$ ,  $E(X)$ ,  $f_{Y|1}(y)$ ,  $E(Y|X=1)$ . São  $X$  e  $Y$  independentes?

(a)  
 $X$  tem distribuição binomial com  $n = 3$  e  $p_1 = 0.01$  :

```
> restart;
> p1:= 0.01: n := 3:
> fX := x-> binomial(n, x)*p1^x*(1-p1)^(n-x);
                                fX:=x→binomial(n,x) p1^x (1-p1)^(n-x) (26)
```

```
> Lx:= [seq(fX(x), x = 0 .. n)];
                                Lx := [0.9702990, 0.029403, 0.000297, 0.0000010] (27)
```

$Y$  tem distribuição binomial com  $n=3$  e  $p_2 = 0.2$ :

```
> p2 := 0.2: n := 3: p3:=0.79:
> fY:=y->binomial(n, y)*p2^y*(1-p2)^(n-y) ;
                                fY:=y→binomial(n,y) p2^y (1-p2)^(n-y) (28)
```

```
> Ly := [seq(fY(y), y = 0 .. n)];
                                Ly := [0.5120, 0.384, 0.096, 0.0080] (29)
```

```
> Pr(X = 1, Y = 1) := factorial(3)*p1*p2*p3/(1*1);
                                Pr(X=1, Y=1) := 0.00948 (30)
```

```
> Pr(X = 2, Y = 1) := (1/2)*factorial(3)*p1^2*p2;
                                Pr(X=2, Y=1) := 0.00006000000000 (31)
```

```
> Pr(X = 3, Y = 0) := (factorial(3)*(1/factorial(3)))*p1^3;
                                Pr(X=3, Y=0) := 0.000001 (32)
```

```
> Pr(X = 1, Y = 2) := (1/2)*factorial(3)*p1*p2^2;
                                Pr(X=1, Y=2) := 0.001200000000 (33)
```

```
> Pr(X = 0, Y = 1) := (1/2)*factorial(3)*p2*p3^2;
                                Pr(X=0, Y=1) := 0.3744600000 (34)
```

Notemos que, como esperado,

```
> P(Y = 1) := Pr(X = 0, Y = 1)+Pr(X = 2, Y = 1)+Pr(X = 1, Y = 1);
                                P(Y=1) := 0.3840000000 (35)
```

```
> Pr(X = 1, Y = 0) := (1/2)*factorial(3)*p1*p3^2;
                                (36)
```

$$Pr(X=1, Y=0) := 0.01872300000 \quad (36)$$

$$\begin{aligned} > Pr(X = 0, Y = 0) := (factorial(3)*(1/factorial(3)))*p3^3; \\ Pr(X=0, Y=0) := 0.493039 \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} > Pr(X = 2, Y = 0) := (1/2)*factorial(3)*p1^2*p3; \\ Pr(X=2, Y=0) := 0.0002370000000 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} > Pr(X = 0, Y = 2) := (1/2)*factorial(3)*p2^2*p3; \\ Pr(X=0, Y=2) := 0.09480000000 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} > Pr(X = 0, Y = 3) := (factorial(3)*(1/factorial(3)))*p2^3; \\ Pr(X=0, Y=3) := 0.008 \end{aligned} \quad (40)$$

Portanto, formamos a tabela:

	Y	0	1	2	3
X					
3		0.000001			
2		0.000237	0.00006		
1		0.018723	0.00948	0.0012	
0		0.493039	0.37446	0.0948	0.008

$$\begin{aligned} > E(Y, X = 1) := Pr(X = 1, Y = 1)+2*Pr(X = 1, Y = 2); \\ E(Y, X=1) := 0.01188000000 \end{aligned} \quad (41)$$

Como X é uma variável aleatória binomial,

$$\begin{aligned} > E(X) := 3*p1; \\ E(X) := 0.03 \end{aligned} \quad (42)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} > fX(1)*fY(1); \\ 0.011290752 \end{aligned} \quad (43)$$

que é diferente de  $f_{XY}(1, 1) = 0.00948$ . Portanto as variáveis não são independentes.

7. Dados relativos a espessura, em angstroms, de óxido em semicondutores são listados a seguir: 424, 426, 417, 418, 422, 436, 418, 414, 431, 433, 423, 426, 411, 435, 430, 428, 411, 424, 409, 427, 422, 428, 427, 413, 415, 422.

- Calcule um estimador pontual da espessura media de oxido para todos os membros da população.
- Calcule um estimador pontual para o desvio padrão da espessura de óxido para todos os membros da população.
- Calcule o erro padrão para o estimador pontual da parte (a).
- Calcule um estimador pontual da mediana.
- Calcule um estimador pontual da proporção de semicondutores na população que tem espessura de óxido maior do que 415.

(a)

> restart;

> with(Statistics):

```

> L := rtable([424, 426, 417, 418, 422, 436, 418, 414, 431, 433,
423, 426, 411, 435, 430, 428, 411, 424, 409, 427, 422, 428, 427,
413, 415, 422], subtype = Array):
> n := nops(op(3,L));
n := 26 (44)

```

```

> Mean(L);
422.6923077 (45)

```

(b)

```

> s := StandardDeviation(L);
s := 7.598785328 (46)

```

(c) O erro padrão é dado por

```

> sigma[P] := evalf(s/sqrt(n));
 $\sigma_p := 1.490244411$  (47)

```

ou

```

> StandardError(Mean, L);
1.490244410 (48)

```

(d)

```

> Median(L);
423.5000000 (49)

```

```

> k := 0:

```

```

> for i to n do if L[i] > 415 then k := k+1 end if end do;
> k;
20 (50)

```

Ou seja, o estimador pontual da proporção é

```

> k/n;
 $\frac{10}{13}$  (51)

```

```

> evalf(%);
0.7692307692 (52)

```