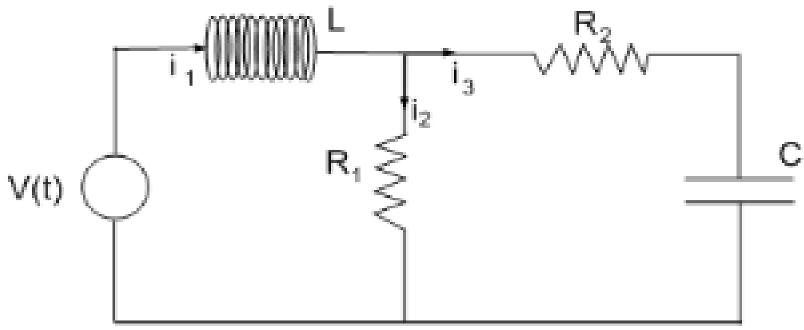
EDI - Prova 3
2010/2
Prof. Fernando Deeke Sasse

1. Considere o circuito abaixo, com $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $L = 1\ H$, $C = 0.2\ F$ e $V = \begin{cases} 120, & 0 \le t < 2 \\ 0 & t \ge 2 \end{cases}$.



Suponha que $i_2(0) = 0$, $i_3(0) = 0$. Determine $i_1(t)$.

Solução
As equações para as duas malhas são dadas por

$$L\left(\frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt}\right) + R_1 i_2 = 120\left[1 - H_2(t)\right]$$

$$R_2 i_3 + \left(\frac{1}{C}\right)\int_0^t i_3(\tau)\, d\tau - R_2 i_2 = 0\,.$$

> $restart:$

> $L := 1 : R1 := 10 : R2 := 5 : C := 0.2 : i1(0) := 0 : i2(0) := 0 :$

> $V := 120(1 - \text{Heaviside}(t-2)) :$

> $eq1 := L\cdot(diff(i2(t), t) + diff(i3(t), t)) + R1\ i2(t) = V$

$$eq1 := \frac{d}{dt}\, i2(t) + \frac{d}{dt}\, i3(t) + 10\ i2(t) = 120 - 120\ \text{Heaviside}(t-2) \quad \textbf{(1)}$$

> $eq2 := R2\ i3(t) + \left(\frac{1}{C}\right)\cdot Int(i3(\text{tau}), \text{tau}) - R1\ i2(t) = 0$

$$eq2 := 5\ i3(t) + 5.000000000\left(\int i3(\tau)\, d\tau\right) - 10\ i2(t) = 0 \quad \textbf{(2)}$$

> $with(inttrans)$

[*addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable*] **(3)**

> $EQ1 := L\ (s\cdot I2 + s\cdot I3) + R1\cdot I2 = laplace(V, t, s)$

$$EQ1 := s\ I2 + s\ I3 + 10\ I2 = \frac{120\left(1 - e^{-2s}\right)}{s} \quad \textbf{(4)}$$

> $EQ2 := R2\cdot I3 + \left(\frac{1}{C}\right)\cdot\left(\frac{I3}{s}\right) - R1\cdot I2 = 0$

(5)

$$EQ2 := 5\, I3 + \frac{5.000000000\, I3}{s} - 10\, I2 = 0 \quad \textbf{(5)}$$

> sol := solve({EQ1, EQ2}, {I2, I3})

$$sol := \left\{ I2 = -\frac{120.\,(s+1.)\,(-1. + e^{-2.s})}{s\,(11.\,s + 10. + 3.\,s^2)},\ I3 = -\frac{240.\,(-1. + e^{-2.s})}{11.\,s + 10. + 3.\,s^2} \right\} \quad \textbf{(6)}$$

> assign(sol) :

> ii2 := invlaplace(I2, s, t)

$$ii2 := 12.\,\mathrm{Heaviside}(2. - 1.\,t) + 48.\,e^{-1.666666667\,t} - 60.\,e^{-2.\,t} + 12.\,\left(-4.\,e^{-1.666666667\,t + 3.333333333} + 5.\,e^{-2.\,t + 4.}\right)\mathrm{Heaviside}(t - 2.) \quad \textbf{(7)}$$

> ii3 := invlaplace(I3, s, t)

$$ii3 := 240.\,e^{-1.666666667\,t} - 240.\,e^{-2.\,t} + 240.\,\left(-1.\,e^{-1.666666667\,t + 3.333333333} + e^{-2.\,t + 4.}\right)\mathrm{Heaviside}(t - 2.) \quad \textbf{(8)}$$

> ii1 := expand(ii2 + ii3)

$$ii1 := 12.\,\mathrm{Heaviside}(2. - 1.\,t) + 288.\,e^{-1.666666667\,t} - 300.\,e^{-2.\,t} - 8073.107969\,\mathrm{Heaviside}(t - 2.)\,e^{-1.666666667\,t} + 16379.44501\,\mathrm{Heaviside}(t - 2.)\,e^{-2.\,t} \quad \textbf{(9)}$$

2. Determine a solução em séries de potências do PVI

$$(x^2 + 3)y'' + xy' + 2\,y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = -2\,.$$

Determine ao menos seis termos não-nulos da série. Estime o raio de convergência da solução.

> restart :

> $eq := (3 + x^2)\left(\frac{d^2}{dx^2}\, y(x)\right) + x\cdot\left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) + 2\, y(x)$

$$eq := (3 + x^2)\left(\frac{d^2}{dx^2}\, y(x)\right) + x\left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) + 2\, y(x) \quad \textbf{(10)}$$

> dsolve({eq, y(0) = 1, D(y)(0) = -2}, y(x), type = 'series')

$$y(x) = 1 - 2\,x - \frac{1}{3}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{18}\,x^4 - \frac{11}{180}\,x^5 + O(x^6) \quad \textbf{(11)}$$

O raio de convergência é $\rho = \sqrt{3}$.

3. Utilize séries de potências para resolver o PVI. Determine ao menos 6 termos não nulos.
$y'' + \cos(x)y' + x\,y = 1, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1$.

> restart :

> $eq := \left(\frac{d^2}{dx^2}\, y(x)\right) + \cos(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) + x\, y(x) = 1$

$$eq := \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) + \cos(x)\left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) + x\, y(x) = 1 \quad \textbf{(12)}$$

> dsolve({eq, y(0) = 1, D(y)(0) = -1}, y(x), type = 'series')

$$y(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{2}\,x^3 + \frac{1}{6}\,x^4 - \frac{1}{30}\,x^5 + O(x^6) \quad \textbf{(13)}$$

O raio de convergência é $\rho < \infty$.

4. Resolva a equação do problema 3, agora com as condições iniciais $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 0$. Determine ao menos 4 termos não nulos e estime o raio de convergência.

```
> restart :
```

$$> eq := \left(\frac{d^2}{dx^2}\, y(x)\right) + \cos(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) + x\, y(x) = 1$$

$$eq := \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) + \cos(x)\left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) + x\, y(x) = 1 \qquad \textbf{(14)}$$

$$> dsolve(\{eq, y(\mathrm{Pi}) = 1, \mathrm{D}(y)(\mathrm{Pi}) = 0\}, y(x), type = \text{'series'})$$

$$y(x) = 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\pi\right)(x-\pi)^2 - \frac{1}{6}\pi(x-\pi)^3 + \left(-\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{24}\pi^2\right)(x-\pi)^4 + \left(\frac{1}{30}\pi + \frac{1}{60}\pi^2 - \frac{1}{20}\right)(x-\pi)^5 + \mathrm{O}\left((x-\pi)^6\right) \qquad \textbf{(15)}$$