CDI 4 - Prova 3

Funções especiais, séries de Fourier

Engenharia Elétrica, Turma A

Joinville, 28 de maio de 2008

Prof. Fernando D. Sasse

1 [4] *Se*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,,$$

prove as fórmulas da estatística:

$$(a)\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1\,, \qquad (b)\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \mu\,, \qquad (c)\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \sigma^2\,.$$

2 *Uma partícula de massa m é atraída na direção de um ponto fixo O, em $x = 0$, com uma força inversamente proporcional à distância até O. A partícula é solta de um ponto $x = a$ em $t = 0$.*
(a) [1] *Mostre que a equação que descreve este movimento é dada por*

$$mv\frac{dv}{dx} = -\frac{k}{x}\,,$$

onde $v = dx/dt$.
(b) [2] *Resolva esta equação para v, utilizando as adequadas condições iniciais e mostre que o tempo que a partícula leva para ir de $x = a$ até a origem é dado por*

$$\tau = a\sqrt{\frac{\pi m}{2k}}\,.$$

Sugestão: use a substituição $\ln(a/x) = u$ na integral resultante.

3 [4] *Calcule as integrais:*

$$(a)\ \int_0^1 x^2(\ln x)^3\, dx\,, \qquad (b)\ \int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2}\, dx\,, \qquad (c)\ \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx\,, \quad 0 < p < 1\,.$$

4 [2] *Prove que $\{(1/\sqrt{\pi})\cos kx\,, k = 1, 2, \ldots\}$ forma um conjunto de funções ortonormais no intervalo* $[0, 2\pi]$.

Observações:
(i) A prova é sem consultas.
(ii) Os resultados serão divulgados em até 10 dias úteis. Gabaritos estarão disponíveis na página da disciplina http://fsasse.t35.com/cdi4.html.
(iii) Não é necessário devolver esta folha de questões.
(v) Duração da prova: 15:20 - 17:00.
(vi) A nota máxima nesta prova é 10.

Fórmulas

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}dt\,, \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,,$$

$$B(z,\xi) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\xi-1}dt\,,$$

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}\,,$$

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\,,$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}\,,$$

$$2\int_0^{\pi/2} \cos^{2z-1}\theta \sin^{2w-1}\theta\, d\theta = B(z,w)\,.$$

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]\,, \quad \sin A\sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]\,.$$