

# Cálculo IV

Engenharia Elétrica

Prof. Fernando Deeke Sasse

Departamento de Matemática, UDESC - Joinville

Prova 2 - 30/4/2008

1. Encontre a expansão de Laurent de:

(a)  $f(z) = \frac{1}{1+z}$  para  $1 < |z|$

(b)  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  para  $1 < |z| < 2$

(a)

```
[ > restart;
  > f:=1/(z*(1+1/z));
  > g:=series(1/(1+u),u);
  > gz:=subs(u=1/z,g);
  > f:=expand((1/z)*gz);
```

$$f := \frac{1}{z \left(1 + \frac{1}{z}\right)}$$

$$g := 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - u^5 + O(u^6)$$

$$gz := 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} + O\left(\frac{1}{z^6}\right)$$

$$f := \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^6} + \frac{O\left(\frac{1}{z^6}\right)}{z}$$

(b)

```
[ > restart;
  > f:= 1/((z-1)*(z-2));
  > f:=convert(f,parfrac,z);
```

$$f := \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

$$f := -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

Fazendo uma expansão em frações parciais, temos

```
[ > f1:=-1/(z-1);
  > f1:=-1/(z*(1-1/z));
  > g1:=series(-1/(1-u),u);
  > f1:=expand((1/z)*subs(u=1/z,g1));
```

$$f1 := -\frac{1}{z-1}$$

$$f1 := -\frac{1}{z \left(1 - \frac{1}{z}\right)}$$

$$g1 := -1 - u - u^2 - u^3 - u^4 - u^5 + O(u^6)$$

$$f1 := -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^6} + \frac{O\left(\frac{1}{z^6}\right)}{z}$$

Esta série converge para  $1 < |z|$ . Por outro lado,

```
[ > f2:=1/(z-2);
  > f2:=(1/2)*(1/(z/2-1));
  > g2:=series(1/(w-1),w);
```

$$f2 := \frac{1}{z-2}$$

$$f2 := \frac{1}{2 \left(\frac{z}{2} - 1\right)}$$

$$g2 := -1 - w - w^2 - w^3 - w^4 - w^5 + O(w^6)$$

> `f2:=expand((1/2)*subs(w=z/2,g2));`

$$f2 := \frac{1}{2} \left( -1 - \left(\frac{z}{2}\right) - \left(\frac{z}{2}\right)^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^3 - \left(\frac{z}{2}\right)^4 - \left(\frac{z}{2}\right)^5 + O\left(\left(\frac{z}{2}\right)^6\right) \right)$$

Esta série converge para  $|z| < 2$ . Portanto,

> `f1+f2;`

$$-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^6} + \frac{O\left(\frac{1}{z^6}\right)}{z} + \frac{1}{2} \left( -1 - \left(\frac{z}{2}\right) - \left(\frac{z}{2}\right)^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^3 - \left(\frac{z}{2}\right)^4 - \left(\frac{z}{2}\right)^5 + O\left(\left(\frac{z}{2}\right)^6\right) \right)$$

converge para  $1 < |z| < 2$ .

2. Calcule as integrais complexas

$$(a) \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^6} dz, \quad (b) \int_{|z-1|=1/2} \frac{\sin z}{z^3(z^2-1)} dz, \quad (c) \int_{|z|=2} \frac{dz}{1-\sin z}.$$

Solução.

(a) Expandindo numa série de Taylor em torno do pólo  $z = 0$ , no interior do contorno de integração, temos

> `expand(1/z^6)*convert(series(exp(z),z,8),polynom);`

$$\frac{1}{z^6} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{2z^4} + \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{24z^2} + \frac{1}{120z} + \frac{1}{720} + \frac{z}{5040}$$

Portanto, o resíduo é  $1/120$ , de modo que a integral vale  $\frac{\pi I}{60}$ . De fato,

> `residue(exp(z)/z^6,z=0);`

$$\frac{1}{120}$$

(b) Somente o pólo simples  $z = 1$  está contido no contorno de integração, e o resíduo neste pólo é:

> `r:=subs(z=1,sin(z)/(z^3*(z+1)));`

$$r := \frac{1}{2} \sin(1)$$

de modo que a integral vale  $\pi I \sin(1)$ . Diretamente no Maple temos

> `residue(sin(z)/(z^2-1),z=1);`

$$\frac{1}{2} \sin(1)$$

(c) A função  $f = \frac{1}{1-\sin(z)}$  possui a singularidade  $z = \frac{\pi}{2}$  no interior do contorno.

> `residue(1/(1-sin(z)),z=Pi/2);`

$$0$$

> `g:=1-sin(z);`

$$g := 1 - \sin(z)$$

> `simplify(subs(z=Pi/2,g));`

$$0$$

> `g1:=diff(g,z);`

$$g1 := -\cos(z)$$

> `simplify(subs(z=Pi/2,g1));`

$$0$$

> `g2:=diff(g1,z);`

$$g2 := \sin(z)$$

> `simplify(subs(z=Pi/2,g2));`

$$1$$

Portanto, este é um pólo de segunda ordem de  $f$ . O resíduo é então dado por

> `e1:=diff((z-Pi/2)^2/(1-sin(z)),z);`

$$e1 := \frac{2 \left( z - \frac{\pi}{2} \right) + \left( z - \frac{\pi}{2} \right)^2 \cos(z)}{1 - \sin(z) + (1 - \sin(z))^2}$$

> `r:=limit(e1,z=Pi/2);`

$$r := 0$$

Portanto, a integral vale zero.

3. Use integrais de contorno para calcular as integrais abaixo:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+1} dx, \quad (b) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3+\cos\theta}.$$

Solução.

(a) Determinemos os pólos de  $f = \frac{z+1}{z^4+1}$  no plano superior do plano complexo.

```
> solve(z^4+1);
```

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{2}$$

```
> r:=k->exp((-Pi+2*Pi*k)*I/4);
```

$$r := k \rightarrow e^{(1/4I(-\pi+2\pi k))}$$

Portanto,

```
> r(1);r(2);
```

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{2}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{2}$$

```
> f := (z+1)/(z^4+1);
```

$$f := \frac{z+1}{z^4+1}$$

Os resíduos em cada pólo simples são:

```
> g1:=(z-r(1))*f; g2:=(z-r(2))*f;
```

$$g1 := \frac{\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)(z+1)}{z^4+1}$$

$$g2 := \frac{\left(z + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)(z+1)}{z^4+1}$$

```
> r1:=limit(g1, z=r(1)); r2:=limit(g2, z=r(2));
```

$$r1 := -\frac{1}{4}I - \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{8}I\sqrt{2}$$

$$r2 := \frac{1}{4}I - \frac{1}{8}I\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Portanto, a integral vale:

```
> 2*Pi*I*(r1+r2);
```

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

Diretamente no Maple temos

```
> simplify(2*Pi*I*(residue(f, z=r(1))+residue(f, z=r(2))));
```

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

ou

```
> simplify(int(f, z=-infinity..infinity));
```

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

(b)

```
> restart;
```

```
> f:=1/(3+costheta);
```

$$f := \frac{1}{3 + \cos\theta}$$

```
[ > costheta := (1/2) * (z+1/z);
```

$$\text{costheta} := \frac{z}{2} + \frac{1}{2z}$$

```
[ > fc := (-I/z) * f;
```

$$fc := \frac{-I}{z \left( 3 + \frac{z}{2} + \frac{1}{2z} \right)}$$

```
[ > fc := normal (fc);
```

$$fc := \frac{-2I}{6z + z^2 + 1}$$

```
[ temos aqui os pólos simples:
```

```
[ > r := solve (denom (fc));
```

$$r := -3 + 2\sqrt{2}, -3 - 2\sqrt{2}$$

```
[ > r[1]; r[2];
```

$$\begin{aligned} & -3 + 2\sqrt{2} \\ & -3 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

```
[ Notemos que
```

```
[ > evalf (r[1]); evalf (r[2]);
```

$$\begin{aligned} & -0.171572876 \\ & -5.828427124 \end{aligned}$$

```
[ de modo que somente r[1] está contido no interior do contorno de integração. O resíduo neste pólo é dado por
```

```
[ > RESID := subs (z=r[1], -2*I/(z-r[2]));
```

$$RESID := \frac{-1}{4} I \sqrt{2}$$

```
[ ou
```

```
[ > residue (fc, z=r[1]);
```

$$\frac{-1}{4} I \sqrt{2}$$

```
[ Portanto, a integral vale
```

```
[ > 2*Pi*I*RESID;
```

$$\frac{\pi \sqrt{2}}{2}$$

```
[ De fato,
```

```
[ > int (1/(3+cos (theta)), theta=0..2*Pi);
```

$$\frac{\pi \sqrt{2}}{2}$$

```
[ >
```