Probabilidade e Estatística, 2009/2

CCT - UDESC

Prof. Fernando Deeke Sasse

Problemas Resolvidos - Testes de Hipóteses: Chi-Quadrado

1. Em 200 lances de uma moeda foram observadas 115 caras e 85 coroas. Verifique a hipótese da moeda ser honesta, usando $\alpha = 0.05$ e $\alpha = 0.01$.

Solução:
As frequências observadas de caras e coroas são, respectivamente, $o_1 = 115$ e $o_2 = 85$. As frequências observadas são $e_1 = e_2 = 100$, respectivamente. O teste estatístico é

$$\chi^2 = \frac{(o_1 - e_1)^2}{e_1} + \frac{(o_2 - e_2)^2}{e_2} .$$

ou seja,

```
> restart :
> o[1] := 115; o[2] := 85; e[1] := 100; e[2] := 100;
```

$$o_1 := 115$$
$$o_2 := 85$$
$$e_1 := 100$$
$$e_2 := 100 \qquad \textbf{(1.1)}$$

```
> chi2[0] := evalf((o[1]-e[1])^2/e[1]+(o[2]-e[2])^2/e[2]);
```

$$\chi2_0 := 4.500000000 \qquad \textbf{(1.2)}$$

O número de graus de liberdade da distribuição chi-quadrado, quando as frequencias esperadas podem ser calculadas, sem necessidade de estimação dos parâmetros populacionais, a partir de dados amostrais é $\nu = k - 1$, onde k é o número de categorias. No presente caso temos $\nu = 2 - 1 = 1$.
Devemos agora calcular $\chi^2_{0.05,\ 1}$.
A hipótese nula é H_0 : a moeda é honesta.

```
> with(Statistics);
> nu := 1;
> X := RandomVariable(ChiSquare(nu));
> Quantile(X, .95);
```

$$3.841456066 \qquad \textbf{(1.3)}$$

```
>
```

Como $\chi2_0 := 4.5 > \chi^2_{0.05,\ 1} = 3.84$ a hipótese nula é rejeitada, ou rejeitamos a hipótese da moeda ser honesta, com nível de significância 0.05.
Quando $\alpha = 0.01$ temos

```
> Quantile(X, .99);
```

$$6.634895859 \quad (1.4)$$

Como $\chi 2_0 := 4.5 < \chi^2_{0.01,\,1} = 6.634$, não podemos rejeitar a hipótese da moeda ser honesta, com nível de significância 0.01.

Segundo Método:
Testemos as hipóteses:
H_0 : moeda é honesta
H_1 : moeda não é honesta

> $restart$:

> $with(Statistics)$:

> $p := 0.5 : n := 200$:

> $\text{alpha} := 0.05$:

> $\mu := n \cdot p$;

$$\mu := 100.0 \quad (1.5)$$

> $\sigma := \text{sqrt}(\text{n} \cdot \text{p} \cdot (1 - \text{p}))$

$$\sigma := 7.071067812 \quad (1.6)$$

> $X := RandomVariable(Normal(\mu, \sigma))$:

Determinemos o intervalo de aceitação:

> $xc1 := Quantile\left(X, \left(\frac{\text{alpha}}{2}\right)\right)$

$$xc1 := 86.14096176 \quad (1.7)$$

> $xc2 := Quantile\left(X, \left(1 - \frac{\text{alpha}}{2}\right)\right)$

$$xc2 := 113.8590382 \quad (1.8)$$

>

Portanto, se o número de caras estiver no intervalo [87,114], a hipótese nula é aceita (moeda é honesta). Se estiver fora, a hipótese nula é rejeitada, com nível de significância 0.05. Como o número de caras observado é 115, a hipótese nula é rejeitada com nível de confiança 0.05.

Quando $\alpha = 0.01$ temos

> $\text{alpha} := 0.01$:

> $xc1 := Quantile\left(X, \left(\frac{\text{alpha}}{2}\right)\right)$

$$xc1 := 81.78613632 \quad (1.9)$$

> $xc2 := Quantile\left(X, \left(1 - \frac{\text{alpha}}{2}\right)\right)$

$$xc2 := 118.2138637 \quad (1.10)$$

Ou seja, se o número de caras estiver no intervalo [82,119], a hipótese nula é aceita (moeda é honesta). Como o número de caras observado é 115, a hipótese nula nâo pode ser rejeitada com nível de confiança 0.01.

2. Consideremos a seguinte tabela de frequência de observações de uma variável aleatória X.

Values	0	1	2	3	4
Observed Frequency	24	30	31	11	4

(a) Baseado nestas 100 observações, é esta uma distribuição de Poisson com média 1.2 um modelo apropriado? Faça um teste de adequação com $\alpha = 0.05$.

(b) Calule o valor P para este teste.

Solução:
(a)
Notemos que média estimada é

```
> restart
```

$$> \ \mathrm{mu} := \frac{(0\cdot 24 + 30 + 2\cdot 31 + 3\cdot 11 + 4\cdot 4)}{100.}$$

$$\mu := 1.410000000 \qquad \textbf{(2.1)}$$

O problema nos dá:

```
> lambda := 1.2
```

$$\lambda := 1.2 \qquad \textbf{(2.2)}$$

```
> fp:=(x)->exp(-lambda)*lambda^(x)/x!;
```

$$fp := x \rightarrow \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad \textbf{(2.3)}$$

Computemos as probabilidades hipotéticas associadas com cada intervalo de classe:

```
> for i from 0 to 4 do
    p[i+1] := fp(i)
  od;
```

$$p_1 := 0.3011942119$$

$$p_2 := 0.3614330543$$

$$p_3 := 0.2168598326$$

$$p_4 := 0.08674393303$$

$$p_5 := 0.02602317991 \qquad \textbf{(2.4)}$$

```
>
```

As frequências esperadas são:

```
> for i from 1 to 5 do
    e[i] := 100· p[i]
  od;
```

$$e_1 := 30.11942119$$

$$e_2 := 36.14330543$$

$$e_3 := 21.68598326$$

$$e_4 := 8.674393303$$

$$e_5 := 2.602317991 \quad \textbf{(2.5)}$$

Como o item 4 tem frequência esperada menor que 3 juntamos as últimas duas:

> $e[4] := e[4] + e[5]$

$$e_4 := 11.27671129 \quad \textbf{(2.6)}$$

As frequências observadas são (somando as frequências das duas últimas classes):

> $o := [24, 30, 31, 15]$

$$o := [24, 30, 31, 15] \quad \textbf{(2.7)}$$

Testaremos as hipóteses:

H_0 : A forma da distribuição das frequências é de Poisson.

H_1 : A forma da distribuição das frequências não é de Poisson.

O teste estatístico é:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

```
> chi2[0]:=sum((o[j]-e[j])^2/e[j], j = 1 .. 4);
```

$$\chi 2_0 := 7.517135678 \quad \textbf{(2.8)}$$

Devemos agora calcular $\chi^2_{0.05,\,\nu}$, onde ν é dado por

> nu := 5 − 1 − 1

$$\nu := 3 \quad \textbf{(2.9)}$$

```
> with(Statistics):
> X := RandomVariable(ChiSquare(nu)):
> Quantile(X, .95);
```

$$7.814728288 \quad \textbf{(2.10)}$$

```
>
```

Como $\chi 2_0 := 7.517135678 < \chi^2_{0.05,\,3} = 7.814728288$ a hipótese nula é aceita.

(b) O valor P do teste é

> $1 - CDF(X, 7.517135678, numeric)$

$$0.0571198068 \quad \textbf{(2.11)}$$