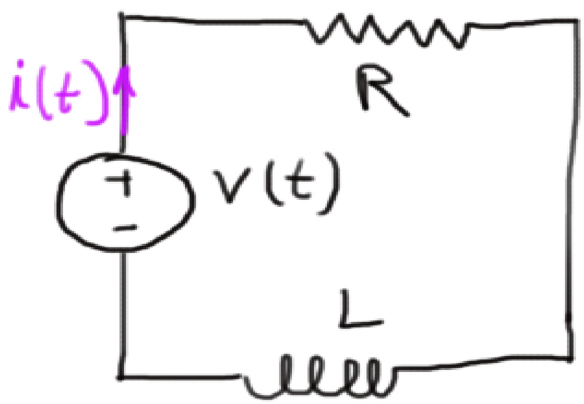
Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem
Problemas Resolvidos

Fernando Deeke Sasse
Departmento de Matemática
CCT - UDESC

Circuito RL

Considere o circuito que consiste um resistor de resitência R e um indutor de indutância L ligados em série, como mostrado no diagrama abaixo.



Aplicando a lei de Kirchhoff a este circuito temos

$$R\,i + L\frac{d\,i}{dt} = V(t)$$

Suponhamos que $L = 20\,H$, $R = 2\,\Omega$, $i(0) = 0$ e

$$V(t) = \begin{cases} 10\,, & 0 \le t < 20 \\ 0\,, & 20 \le t \end{cases}$$

sendo a tensão dada em volts e o tempo em segundos. Resolvamos a correspondente equação diferencial nos intervalos de tempo $[0, 20)$ e $[20, \infty)$, e depois juntemos as soluções em $t = 20$ *s*.

(i) $0 \le t < 20$

Aqui temos o problema de valor inicial:

$$20\frac{d\,i}{dt} + 2\,i = 10\,,\quad i(0) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d\,i}{dt} + \frac{1}{10}\,i = \frac{1}{2}\,,\quad i(0) = 0.$$

Buscando uma solução da forma $i = u\,v$, temos

$$v = \int e^{-\frac{1}{10}t}\,\mathrm{d}t = e^{-\frac{1}{10}t}.$$

Por outro lado,

$$u = \int \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{v}\,d\,t + C = \int \frac{1}{2}\,e^{\frac{1}{10}t}.\mathrm{d}t + C = 5\,e^{\frac{1}{10}t} + C\,.$$

Portanto,

$$i(t) = u\,v = \left(5\,e^{\frac{1}{10}t} + C\right)e^{-\frac{1}{10}t} = 5 + Ce^{-\frac{1}{10}t}.$$

A condição inicial implica que $i(0) = 0 = 5 + C$, $C = -5$, ou seja,

$$i(t) = 5\left(1 - e^{-\frac{1}{10}t}\right), \quad 0 \le t < 20.$$

(ii) $20 \le t$

A equação diferencial, neste intervalo, tem a forma:

$$20\frac{d\,i}{dt} + 2\,i = 0\,,$$

ou seja,

$$\frac{\mathrm{d}\,i}{i} = -\frac{1}{10}\mathrm{d}\,t$$

$$i(t) = Ae^{-\frac{1}{10}t}.$$

A constante A pode ser determinada impondo a condição de continuidade da corrente em $t = 20$ s:

$$i(20) = Ae^{-\frac{1}{10}20} = Ae^{-2} = 5\left(1 - e^{-2}\right)$$

ou

$$A = 5\left(e^{2} - 1\right).$$

Portanto,

$$i(t) = \begin{cases} 5\left(1 - e^{-\frac{1}{10}t}\right), & 0 \le t < 20 \\ 5\left(e^{2} - 1\right)e^{-\frac{1}{10}t}, & 20 \le t \end{cases}$$

Façamos o gráfico desta solução.

```
> i1:=5*(1-exp(-(1/10)*t));i2:=(5*(exp(2)-1))*exp(-(1/10)*t);
```

$$i1 := 5 - 5\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t}$$

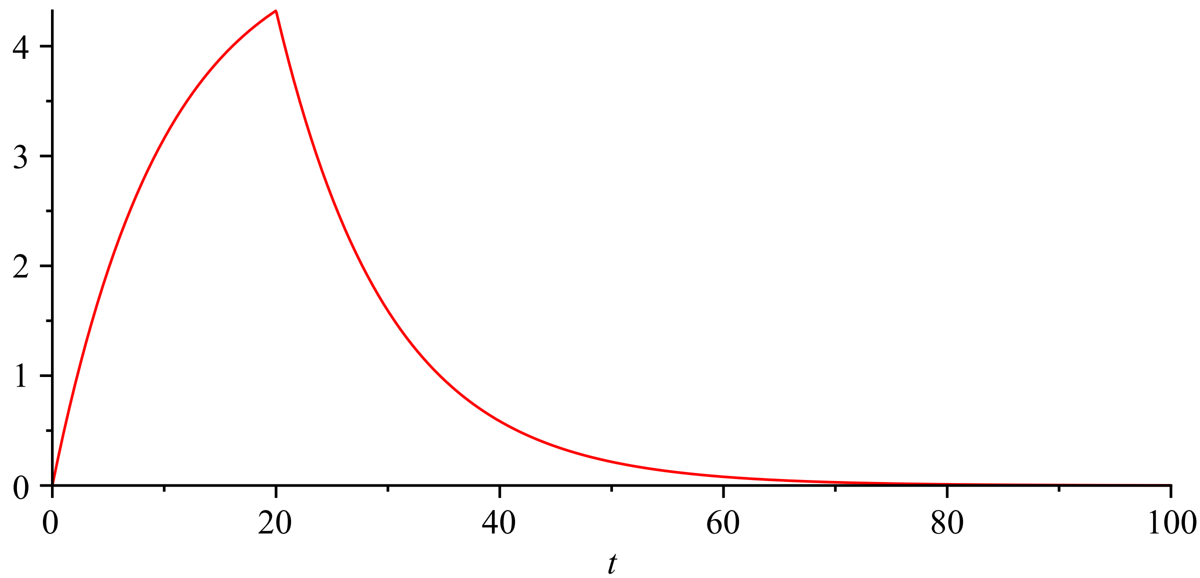
$$i2 := 5\,\left(\mathrm{e}^{2} - 1\right)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t} \qquad \mathbf{(1)}$$

```
> i:=piecewise(0 <=t and t < 20, i1, i2);
```

(2)

$$i := \begin{cases} 5 - 5\,e^{-\frac{1}{10}t} & 0 \le t \textbf{ and } t < 20 \\ 5\left(e^{2}-1\right)e^{-\frac{1}{10}t} & \textit{otherwise} \end{cases} \tag{2}$$

```
> plot(i,t=0..100);
```



Resolvamos este problema de modo automático no Maple, desi

```
> restart:
> V:=piecewise(0 <=t and t < 20, 10, 0);
```

$$V := \begin{cases} 10 & 0 \le t \textbf{ and } t < 20 \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases} \tag{3}$$

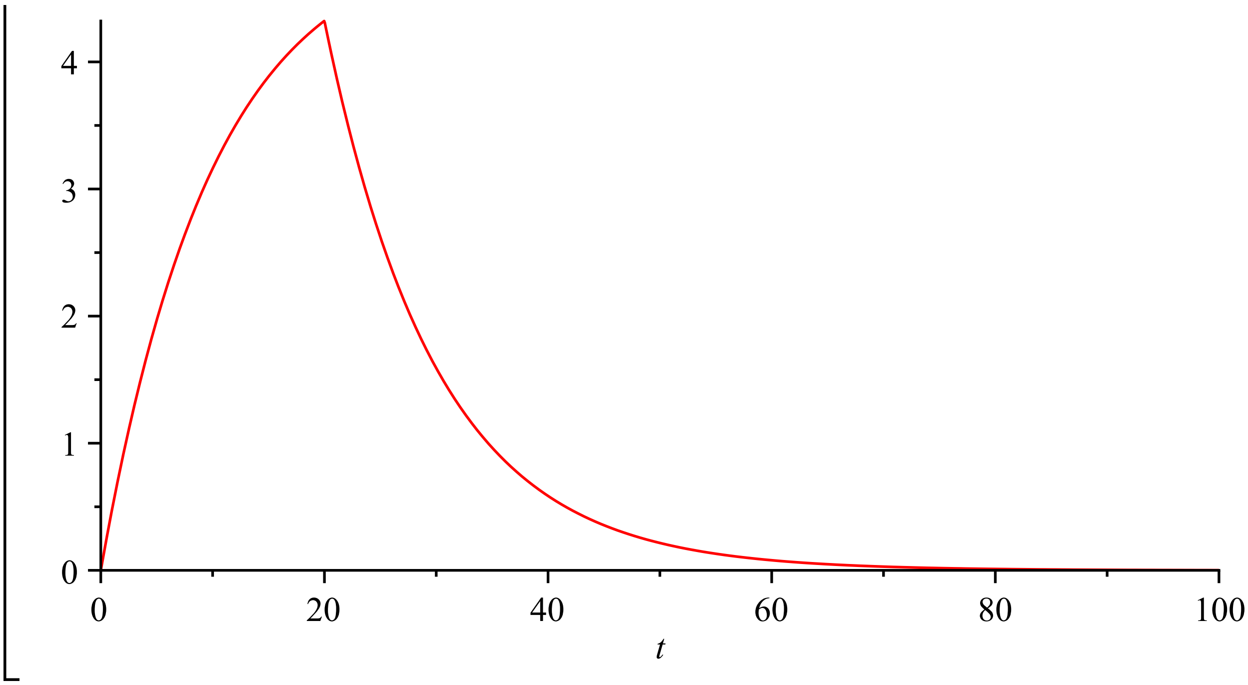
```
> eq:=20*diff(i(t),t)+2*i(t)=V;
```

$$eq := 20\left(\frac{d}{dt}\,i(t)\right) + 2\,i(t) = \begin{cases} 10 & 0 \le t \textbf{ and } t < 20 \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$

```
> sol:=dsolve({eq,i(0)=0});
```

$$sol := i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 5 - 5\,e^{-\frac{1}{10}t} & t < 20 \\ -5\,e^{-\frac{1}{10}t} + 5\,e^{-\frac{1}{10}t+2} & 20 \le t \end{cases} \tag{5}$$

```
> plot(rhs(sol),t=0..100);
```



Tal resultado coincide com o obtido anteriormente.