Distribuições Discretas

EST0003, 2009/2

Prof. Fernando Deeke Sasse

Problemas Resolvidos

Distribuição Binomial

1. Lotes de 50 peças são examinados. O número médio de peças não-conformes em um lote é 5. Seja X a variável aleatória binomial que denota o número de peças não conformes.
(a) Quem são n e p ?
(b) Determine $P(X \le 2)$ e $P(X \ge 49)$.
Solução
(a) $n = 50$, $p = \frac{5}{50} = 0.1$.
(b)

> restart

> with(Statistics) :

> $n := 50; p := 0.1$

$$n := 50$$
$$p := 0.1 \quad (1)$$

> $Pb := x \to \text{binomial}(n, x)\, p^x\, (1-p)^{n-x}$:

> $P(X \le 2) := sum(Pb(x), x = 0..2)$

$$P(X \le 2) := 0.1117287563 \quad (2)$$

> $Pb(49); Pb(50)$

$$4.50\ 10^{-48}$$
$$1.0\ 10^{-50} \quad (3)$$

Ou seja, $P(X \ge 49)$ é praticamente zero.

2 Como nem todos passageiros de uma companhia aérea chegam para ocupar suas vagas reservados, uma companhia vende 125 tickets para um vôo de somente 120 passageiros. A probabilidade de que um passageiro não apareça é 0.1 e os passageiros se comportam de modo independente.
(a) Qual é a probabilidade de que cada passageiro que aparecer consiga um lugar ?
(b) Qual é a probabilidade de que um vôo parta com assentos vazios ?
Solução
(a) Seja X a variável aleatória que denota o número de passageiros que não comparecem. Cada passageiro terá seu lugar se $X \ge 5$. Então X é uma variável binomial com p = 0.1 e n = 125 e devemos determinar aqui $P(5 \le X) = 1 - P(X \le 4)$.

> restart

> with(Statistics) :

> $n := 125; p := 0.1$

$$n := 125$$
$$p := 0.1 \quad (4)$$

> $P := x \rightarrow \text{binomial}(n, x)\, p^x\, (1-p)^{n-x}$:

> **for** x **from** 0 **to** 4 **do** $P(x)$ **end do**:

> $1 - \left(\sum_{k=0}^{4} P(k) \right)$

$$0.9961414046 \tag{5}$$

(b) A probabilidade de que o vôo parta vazio é $P(5 < X) = 1 - P(X \leq 5)$. Ou seja,

> $1 - sum(P(k), k = 0..5);$

$$0.9885678128 \tag{6}$$

3. Um processo de manufatura tem 100 ordens para cumprir. Cada ordem requer um componente que deve ser comprado de um fornecedor. No entanto, tipicamente 1.5% dos componentes são identificados como defeituosos. Se o fabricante estoca N componentes, determine a probabilidade de que as 100 ordens possam ser cumpridas sem necessidade de comprar mais componentes nos seguintes casos: (a) N = 100, (b) N = 102, (c) N = 110.

Solução

Seja X a variável aleatória binomial com p = 0.015, que denota a quantidade de componentes defeituosos. Queremos determinar

(a) Queremos determinar $P(X = 0)$.

> $restart$

> $with(Statistics)$:

> $p := 0.015$:

> $Pb := (x, n) \rightarrow \text{binomial}(n, x)\, p^x\, (1-p)^{n-x}$

$$Pb := (x, n) \rightarrow \text{binomial}(n, x)\, p^x\, (1-p)^{n-x} \tag{7}$$

> $Pb(0, 100)$

$$0.2206089105 \tag{8}$$

Ou seja, a chance é relativamente pequena.

(b) Aqui queremos determinar $P(X \leq 2)$.

> $P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} Pb(k, 100)$

$$P(X \leq 2) = 0.8098050652 \tag{9}$$

>

(c)

> $P(X \leq 5) = \sum_{k=0}^{5} Pb(k, 100)$

$$P(X \leq 5) = 0.9959093432 \tag{10}$$

Portanto, um pequeno aumento no estoque implica em um grande aumento na probababilidade de se cumprir uma ordem sem a necessidade de comprar mais componentes. Notemos também que um aumento muito grande no estoque não é necessário.

4. Um teste de múltipla escolha contém 25 questões, cada uma com 4 respostas. Suponha que um estudante somente adivinha as questões.

(a) Qual é a probabilidade de que o estudante responda mais do que 20 questões corretamente?

(b) Qual é a probabilidade de que o estudante responda menos do que 3 questões corretamente?

Solução

(a)

> $restart$

> $with(Statistics):$

> $p := 0.25 : n := 25 :$

> $Pb := x \to \text{binomial}(n, x)\, p^x\, (1-p)^{n-x}:$

> $P(X \geq 20) := sum(Pb(x), x = 20..25)$

$$P(20 \leq x) := 1.243460090\ 10^{-8} \qquad \textbf{(11)}$$

>

(b)

> $P(X \leq 3) := sum(Pb(x), x = 0..3)$

$$P(x \leq 3) := 0.09621407473 \qquad \textbf{(12)}$$

> $with(plots):$

Podemos plotar todas as probabilidades:

> $xdata := [seq(x, x = 0..n)]$

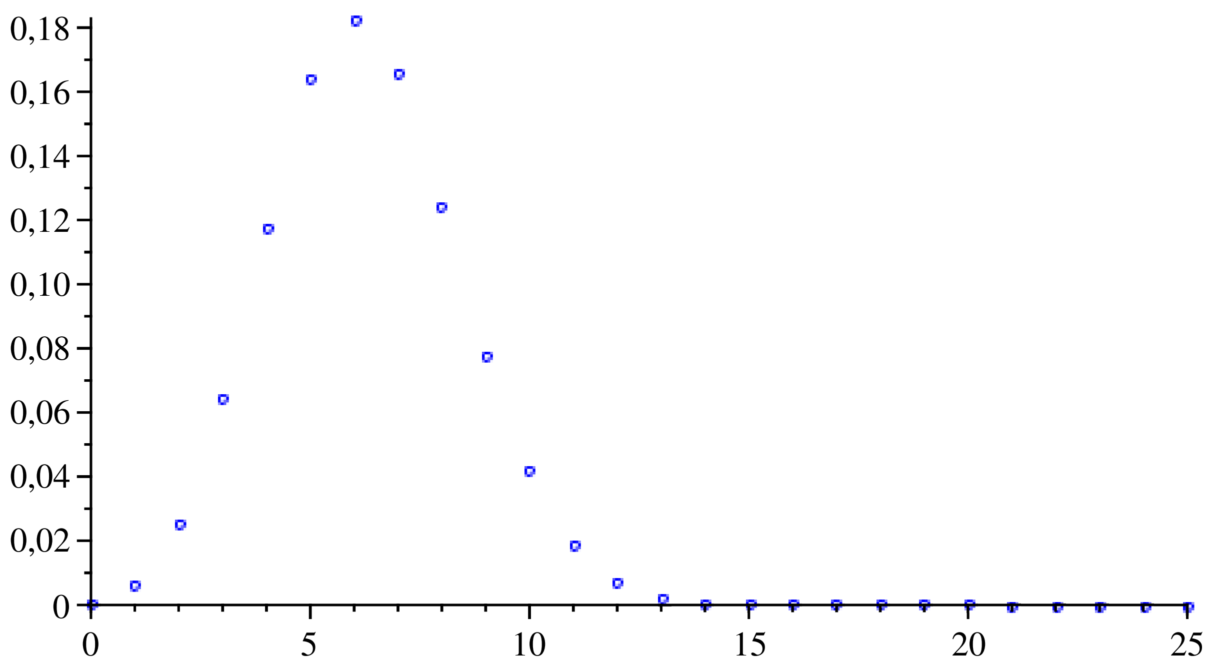
> $ydata := [seq(Pb(x), x = 0..n)]$

> $PL1 := PointPlot(ydata, xcoords = xdata, color = blue, symbol = circle)$

> $\sum_{k=0}^{n} Pb(k)$

$$1. \qquad \textbf{(13)}$$

> $display(PL1)$



>

5. Um produto eletrônico contém 40 circuitos integrados. A probabilidade de que qualquer circuito (CI) integrado falhe é 0.01, e os todos eles são independentes. O produto opera somente se todos os CIs funcionam. Qual a probablidade de que o produto funcione?

Solução.

Seja X a variável aleatória binomial que denota o número de componentes que falham. Então

> $restart$

> $with(Statistics):$

> $p := 0.01 : n := 40 :$

> $Pb := x \rightarrow \text{binomial}(n, x)\, p^x\, (1-p)^{n-x} :$

> $P(X=0) := Pb(0)$

$$P(X=0) := 0.6689717586 \tag{14}$$

Portanto, a probabilidade de que o produto funcione é de 66,9%.

Distribuição Geométrica

1. Um site da web é operado por 4 servidores idênticos. Somente um é usado para operar o sites. Os outros são reservas que podem ser ativados no caso em que o servidor ativo falha. A probabilidade de que uma requisição ao site falhe no servidor que está ativo é 0.0001. Suponha que cada requisição é uma amostragem independente. Qual é o tempo médio até que ocorra uma falha em todos os 4 computadores ?

Solução.

Seja X a variavel aleatória que denota o número de requisições até que os 4 computadores falhem.

Temos aqui uma distribuição geométrica negativa, com p = 0.0001, r = 4.

> $restart :$

> $p := 0.0001 : r := 4 :$

> $\mu := r/p$

2. Uma sistema de produção pára após serem detectadas três falhas de produção. Suponha que a probabilidade de falha é 0.001 e que cada processo é independente.

(a) Qual é o número médio de processos até que o sistema pare?

(b) Qual é o desvio-padrão do número de processos até que o sistema pare?

Solução.

(a)

> $restart$

> $r := 3. : p := 0.001 :$

> $\mu := \frac{r}{p}$

$$\mu := 3000.000000 \tag{15}$$

(b)

> $\sigma := \left(\frac{r\,(1-p)}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$V(X) = 1731.184566 \tag{16}$$

>

3. A probabilidade de sucesso em um alinhamento óptico na montagem de um aparelho é 0.8. Suponha que as tentativas são independentes.

(a) Qual é a probabilidade de que o primeiro alinhamento de sucesso exija exatamente 4 tentativas?

(b) Qual é a probabilidade de que o primeiro alinhamento de sucesso exija no máximo 4 tentativas?

(c) Qual é a probabilidade de que o primeiro alinhamento de sucesso exija no mínimo 4 tentativas?

Solução

Temos aqui uma distribuição binomial geométrica

> $restart$

> $fg := x \rightarrow (1-p)^{(x-1)}\, p$

$$fg := x \rightarrow (1-p)^{x-1}\, p \qquad \textbf{(17)}$$

(a)

> $p := 0.8$

$$p := 0.8 \qquad \textbf{(18)}$$

> $P(X=4) := fg(4)$

$$P(X=4) := 0.0064 \qquad \textbf{(19)}$$

(b)

> $P(X \leq 4) := sum(fg(x), x = 1..4)$

$$P(X \leq 4) := 0.9984000000 \qquad \textbf{(20)}$$

(c)

> $P(X \geq 4) := 1 - sum(fg(x), x = 1..3)$

$$P(4 \leq X) := 0.0080000000 \qquad \textbf{(21)}$$

Distribuição Binomial Negativa

1. Uma companhia possui 8 computadores. A probabilidade de falha de um computador em um dia é de 0.01
 e os computadores falham independentemente. Computadores são consertados de noite e cada dia é uma amostragem independente.
(a) Qual é a probabilidade de que os 8 computadores falhem no mesmo dia?
(b) Qual é o número médio de dias até que um específico computador falhe?
(c) Qual é o número médio de dias até que 2 computadores falhem no mesmo dia?
(d) Qual é a probabilidade de que 2 computores falhem simultaneamente em até 30 dias?
(e) Qual é a probabilidade de haja ao menos 2 falhas simultâneas de computadores em até 30 dias?
(f) Qual é a probabilidade de que não haja nenhuma falha simultânea em 30 dias?
(g) Qual é a probabilidade de que haja dois dias com falhas simultâneas em até 30 dias?
(h) Qual é a probabilidade de que haja dois dias com no mínimo uma falha de computador em até 30 dias?
(i) Qual é a probabilidade de que haja de um a três dias, com no mínimo uma falha de computador em até 30 dias?
Solução.
Seja X a variável aleatória binomial negativa que denota o número de dias até que r computadores falhem.

> $restart$

> $with(Statistics):$

> $Pbn := (x, r, p) \rightarrow \mathrm{binomial}(x-1, r-1)\, p^r\, (1-p)^{x-r}:$

> $p := 0.01:$

(a)

> $P := p^8$

$$P := 1.\ 10^{-16} \qquad \textbf{(22)}$$

(b)

> $\mathrm{mu} := \frac{1}{p}$

$$\mu := 100. \qquad \textbf{(23)}$$

(c)

> $\text{mu} := \frac{2}{p}$

$$\mu := 200. \tag{24}$$

(d)

> $p2 := p^2$

$$p2 := 0.0001 \tag{25}$$

> $sum(Pbn(x, 1, p2), x = 1..30)$

$$0.002995654057 \tag{26}$$

(e)

> **for** i **from** 1 **to** 8 **do**
> $pr[i] := p^i$
> **od**:

> $sum(sum(Pbn(x, 1, pr[j]), j = 2..8), x = 1..30)$

$$0.003025956653 \tag{27}$$

(f)

> $1 - sum(sum(Pbn(x, 1, pr[j]), j = 2..8), x = 1..30)$

$$0.9969740433 \tag{28}$$

(g)

> $sum(sum(Pbn(x, 2, pr[j]), j = 2..8), x = 2..30)$

$$0.000004342323251 \tag{29}$$

(h)

> $sum(sum(Pbn(x, 2, pr[j]), j = 1..8), x = 2..30)$

$$0.03615234064 \tag{30}$$

(i)

> $sum(sum(sum(Pbn(x, r, pr[j]), j = 1..8), x = r..30), r = 1..3)$

$$0.302795633 \tag{31}$$

Distribuição Hipergeométrica

1 Placas de circuito impresso são testadas. Um lote contém 130 peças e 15 são selecionadas, sem substituição, para teste.
(a) Se 10 placas são defeituosas, qual é a probabilidade de que ao menos 1 placa defeituosa ocorra na amostra ?
(b) Se 15 placas são defeituosas, qual é a probabilidade de que ao menos 1 placa defeituosa apareça na amostra ?
Solução.
Temos aqui uma distribuição hipergeométrica.
(a)

> $restart$

> $N := 130 :\ \ n := 15 :\ \ K := 10 : p := K/N;$

$$p := \frac{1}{13} \tag{32}$$

> $fhg := x \rightarrow evalf\left(\frac{\text{binomial}(K, x)\ \text{binomial}(N - K, n - x)}{\text{binomial}(N, n)}\right)$

$$fhg := x \rightarrow evalf\left(\frac{\text{binomial}(K, x)\ \text{binomial}(N - K, n - x)}{\text{binomial}(N, n)}\right) \tag{33}$$

> $1 - fhg(0)$

$$0.7201950397 \tag{34}$$

> $sum(fhg(i), i = 1..15)$

$$0.7201950397 \tag{35}$$

(b)

> $K := 15 : p := \frac{K}{N}$

$$p := \frac{3}{26} \tag{36}$$

> $1 - fhg(0)$

$$0.8582305181 \tag{37}$$

2. Placas de circuito impresso são testadas. Um lote contém 140 placas e 20 são selecionadas sem substituição para teste.
(a) Se 20 placas são defeituosas, qual é a probabilidade de que haja ao menos duas placas defeituosas na amostra?
(b) Se 5 placas são defeituosas, qual é a probabilidade de que haja ao menos duas placas defeituosas na amostra?
(c) Construa a distribuição de massa de probabilidade para os casos de 20 e 5 placas defeituosas.
Solução
(a)

> $restart$

> $with(Statistics) :$

> $N := 140 : \ n := 20$

$$n := 20 \tag{38}$$

> $fhg := (x, K) \rightarrow evalf\left(\frac{\mathrm{binomial}(K, x)\ \mathrm{binomial}(N - K, n - x)}{\mathrm{binomial}(N, n)}\right)$

$$fhg := (x, K) \rightarrow evalf\left(\frac{\mathrm{binomial}(K, x)\ \mathrm{binomial}(N - K, n - x)}{\mathrm{binomial}(N, n)}\right) \tag{39}$$

> $P(X \geq 2) = 1 - fhg(0, 20) - fhg(1, 20)$

$$P(2 \leq X) = 0.8233187745 \tag{40}$$

(b)

> $P(X \geq 2) = 1 - fhg(0, 5) - fhg(0, 5)$

$$P(2 \leq X) = 0.0858811522 \tag{41}$$

(c)

> $with(plots) :$

> $g1 := plot(fhg(x, 20), x = 0..20, color = blue) :$

> $g2 := plot(fhg(x, 5), x = 0..20, color = red) :$

> $K1 := 20 :$

> $xmin := \max(0, n + K1 - N) : xmax := \min(K1, n) :$

> $xdata := [seq(i, i = xmin..xmax)] :$

> $ydata1 := [seq(fhg(x, 20), x = xmin..xmax)] :$

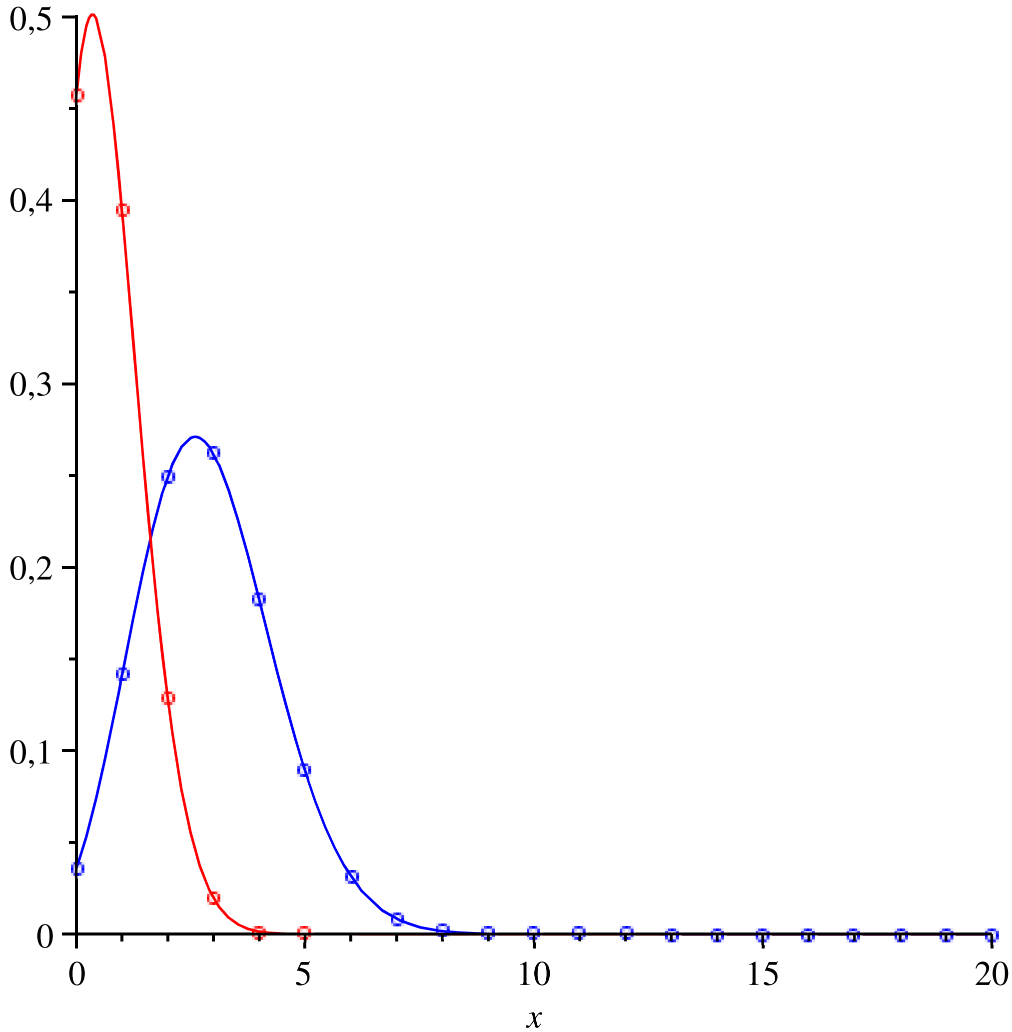
> $ydata2 := [seq(fhg(x, 5), x = 0..5)] :$

> $with(plots) :$

> $PL1 := PointPlot(ydata1, xcoords = xdata, color = blue, symbol = circle) :$

> $PL2 := PointPlot(ydata2, xcoords = xdata, color = red, symbol = circle) :$

> $display([g1, g2, PL1, PL2])$



> ;

3. Use a aproximação binomial para a distribuição hipergeométrica para a aproximar as probabilidades do problema anterior. Determine o termo de correção de população finita.
Solução

> $Pb := (x, n, p) \rightarrow \text{binomial}(n, x)\, p^x\, (1-p)^{n-x}$:

(a)

> $p1 := \frac{20.}{140}$;

$$p1 := 0.1428571429 \qquad (42)$$

> $P(X \geq 2) = 1 - Pb(0, 20, p1) - Pb(1, 20, p1)$

$$P(2 \leq X) = 0.8014424961 \qquad (43)$$

(b)

> $p2 := \frac{5.}{140}$

$$p2 := 0.03571428571 \qquad (44)$$

> $P(X \geq 2) = 1 - Pb(0, 20, p2) - Pb(1, 20, p2)$

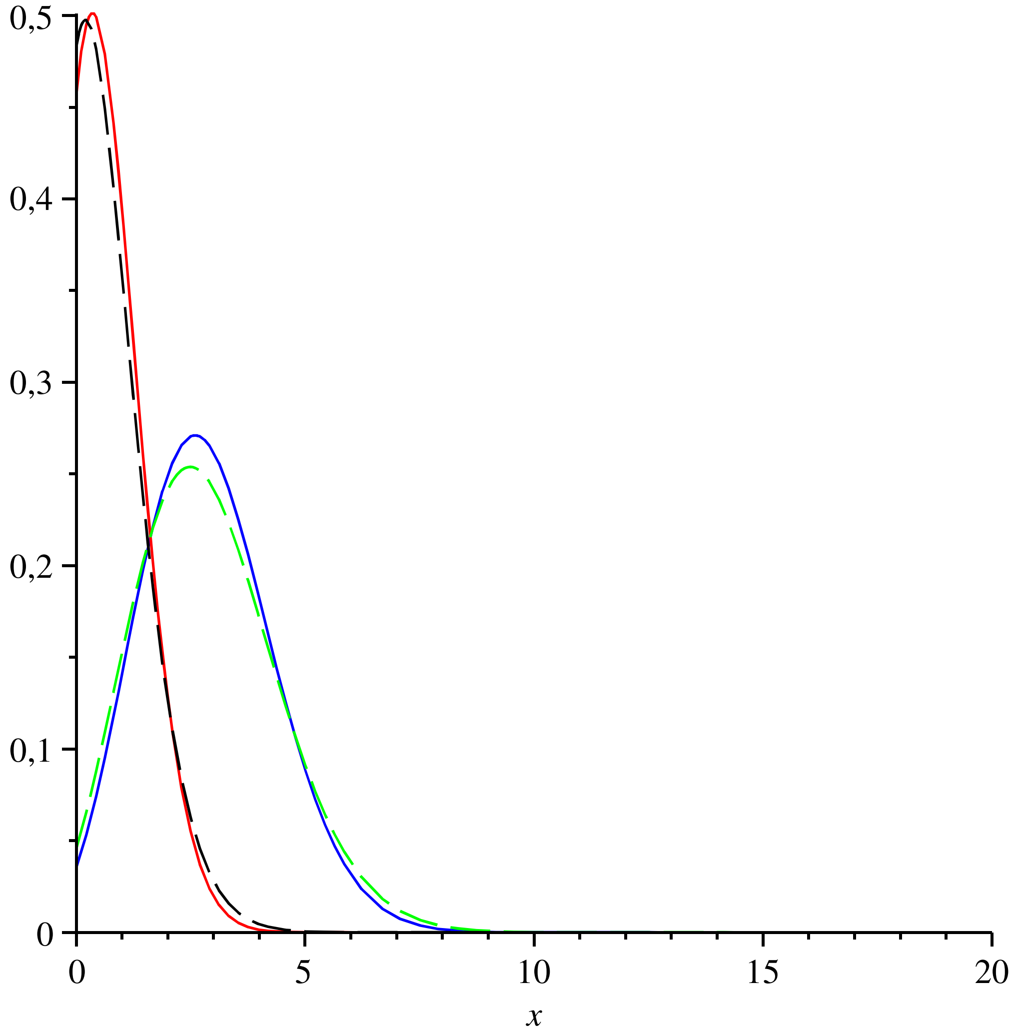
$$P(2 \leq X) = 0.1588978363 \tag{45}$$

(c)

> $g3 := plot(Pb(x, 20, p1), x = 0..20, color = green, linestyle = dash) :$

> $g4 := plot(Pb(x, 20, p2), x = 0..20, color = black, linestyle = dash) :$

> $display([g1, g2, g3, g4])$



A correção de população finita (termo de correção binomial) é dada por

$$\frac{N-n}{N-1},$$

ou seja,

> $evalf\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

$$0.8633093525 \tag{46}$$

4. Um lote de 200 peças contém 35 que são defeituosas. Três peças são selecionadas aleatóriamente e sem substituição. Utilize somente conceitos de probabilidade rudimentares para resolver as questões abaixo. Em seguida verifique os resultados usando a distribuição hipergeométrica.

(a) Qual a probabilidade de que a terceira seja defeituosa?

(b) Qual a probabilidade de que todas sejam defeituosas?
(c) Qual a probabilidade de que ao menos uma seja defeituosa?
(d) Qual a probabilidade de que no máximo duas sejam defeituosas?

Solução
(a) Denotemos por D evento de que uma peça seja defeituosa e N que seja sem defeito. Devemos calcular
P(NND)+P(NDD)+P(DND)+P(DDD)

> restart

> $P(NND) := \frac{155}{300} \cdot \frac{154}{199} \cdot \frac{45}{198}$; $evalf(\%)$

$$P(NND) := \frac{217}{2388}$$
$$0.09087102178 \tag{47}$$

> $P(NDD) := \frac{165}{200} \cdot \frac{35}{199} \cdot \frac{34}{198}$; $evalf(\%)$

$$P(NDD) := \frac{119}{4776}$$
$$0.02491624791 \tag{48}$$

> $P(DND) := \frac{35}{200} \cdot \frac{165}{199} \cdot \frac{34}{198}$; $evalf(\%)$

$$P(DND) := \frac{119}{4776}$$
$$0.02491624791 \tag{49}$$

> $P(DDD) := \frac{35}{200} \cdot \frac{34}{199} \cdot \frac{33}{198}$; $evalf(\%)$

$$P(DDD) := \frac{119}{23880}$$
$$0.004983249581 \tag{50}$$

> $P(NND) + P(NDD) + P(DND) + P(DDD)$; $evalf(\%)$

$$\frac{7}{40}$$
$$0.1750000000 \tag{51}$$

>

(b)

> $P(DDD) := \frac{35}{200} \cdot \frac{34}{199} \cdot \frac{33}{198}$; $evalf(\%)$

$$P(DDD) := \frac{119}{23880}$$
$$0.004983249581 \tag{52}$$

>

(c) Devemos somar P(DDD)+P(DDN)+P(NDD)+P(DND)+P(DNN)+P(NDN)+P(NND). Alguns termos já foram calculados no item anterior. Os que faltam são:

> $PT := P(DDD) + P(DDN) + P(NDD) + P(DND) + P(DNN) + P(NDN) + P(NND)$

$$PT := \frac{7}{40} + P(DDN) + P(DNN) + P(NDN) \tag{53}$$

> $P(DDN) := \frac{35}{200} \cdot \frac{34}{199} \cdot \frac{165}{198}; P(DNN) := \frac{35}{200} \cdot \frac{165}{199} \cdot \frac{164}{198}; P(NDN) := \frac{165}{200} \cdot \frac{35}{199} \cdot \frac{164}{198}$

$$P(DDN) := \frac{119}{4776}$$

$$P(DNN) := \frac{287}{2388}$$

$$P(NDN) := \frac{287}{2388} \quad \textbf{(54)}$$

> $PT; evalf(\%)$

$$\frac{5257}{11940}$$

$$0.4402847571 \quad \textbf{(55)}$$

(d) Devemos calcular P(NNN)+P(DNN)+P(NDN)+P(NND)+P(DDN)+P(NDD)+P(DND)

> $PT := P(NNN) + P(DNN) + P(NDN) + P(NND) + P(DDN) + P(NDD) + P(DND)$

$$PT := \frac{23761}{23880} \quad \textbf{(56)}$$

> $P(NNN) := \frac{165}{200} \cdot \frac{164}{199} \cdot \frac{163}{198}$

$$P(NNN) := \frac{6683}{11940} \quad \textbf{(57)}$$

> $PT; evalf(\%)$

$$\frac{23761}{23880}$$

$$0.9950167504 \quad \textbf{(58)}$$

>

Podemos checar os resultados (b), (c) e (d) utilizando a distribuição hipergeométrica

> $fhg := x \to evalf(\text{binomial}(K, x) * \text{binomial}(N-K, n-x) / \text{binomial}(N, n));$

$$fhg := x \to evalf\left(\frac{\text{binomial}(K, x)\ \text{binomial}(N-K, n-x)}{\text{binomial}(N, n)}\right) \quad \textbf{(59)}$$

> $K := 35; N := 200; n := 3$

$$K := 35$$

$$N := 200$$

$$n := 3 \quad \textbf{(60)}$$

(b)

> $fhg(3)$

$$0.004983249581 \quad \textbf{(61)}$$

(c)

> $sum(fhg(x), x = 1..3)$

$$0.4402847571 \quad \textbf{(62)}$$

(d)

> $sum(fhg(x), x = 0..2)$

$$0.9950167504 \quad \textbf{(63)}$$