

Equações Diferenciais EDI 2011/2

Soluções para a Prova 1 Fernando Deeke Sasse

1. (a) Resolva o problema de valor inicial

$$u' = 1 - u^2, \quad u(0) = 0.$$

Solução

Reescrevemos esta equação como

$$\frac{du}{1 - u^2} = dt.$$

Integrando ambos os lados temos

$$\int \frac{du}{1 - u^2} = \operatorname{arctanh} u = t + C,$$

sendo C uma constante arbitrária. Ou seja,

$$u = \tanh(t + C).$$

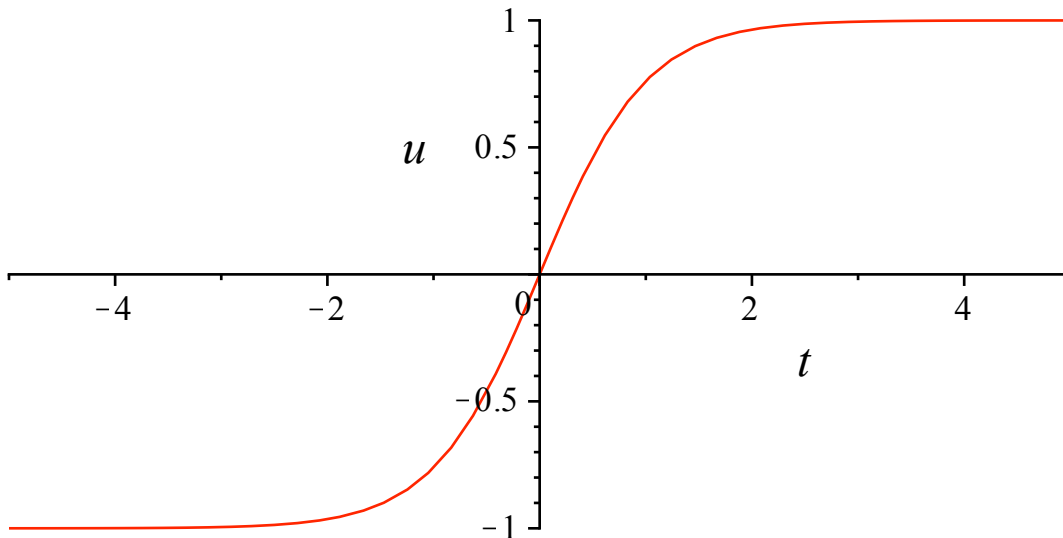
A condição inicial implica:

$$u(0) = 0 = \tanh(C),$$

de modo que $C = 0$ e

$$u = \tanh(t).$$

Tal solução é válida para todo t . A função u é limitada entre -1 e 1 . O respectivo gráfico é mostrado abaixo:



Resolvamos este problema diretamente no Maple:

```
> eq := diff(u(t), t) = 1-u(t)^2;
```

$$eq := \frac{d}{dt} u(t) = 1 - u(t)^2 \quad (1)$$

```
> dsolve({eq, u(0) = 0});
```

$$u(t) = \tanh(t) \quad (2)$$

O gráfico acima pode ser obtido com o comando `plot(tanh(t), t=-5..5)`.

1. (b) Resolva o problema de valor inicial

$$u' = 1 + u^2, \quad u(0) = 0.$$

Solução

Reescrevemos esta equação como

$$\frac{du}{1 + u^2} = dt.$$

Integrando ambos os lados temos

$$\int \frac{du}{1 + u^2} = \arctan u = t + C,$$

sendo C uma constante arbitrária. Ou seja,

$$u = \tan(t + C).$$

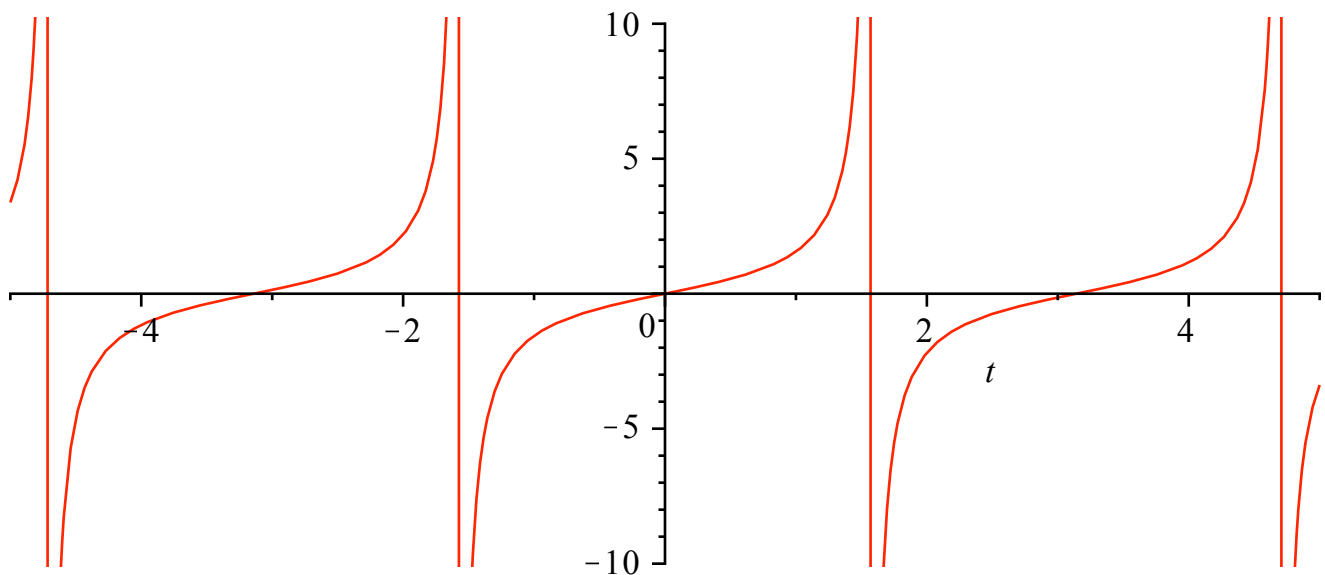
A condição inicial implica:

$$u(0) = 0 = \tan(C),$$

de modo que $C = 0$ e

$$u = \tan(t).$$

Tal solução é válida para todo t , exceto nos pontos $\pm \frac{(2n+1)\pi}{2}$, onde a função diverge. A função u varia de $-\infty$ a $+\infty$. O respectivo gráfico é mostrado abaixo:



Resolvamos este problema diretamente no Maple:

```
> eq := diff(u(t), t) = 1+u(t)^2;
```

$$eq := \frac{d}{dt} u(t) = 1 + u(t)^2 \quad (3)$$

```
> dsolve({eq, u(0) = 0});
```

$$u(t) = \tan(t) \quad (4)$$

O gráfico acima pode ser obtido com o comando `plot(tan(t), t=-5..5, -10..10)`.

1. (c) Resolva o problema de valor inicial

$$u' = \frac{2\sqrt{u} e^{-t}}{t}, \quad u(1) = 4. \quad (1.1)$$

Solução

Reescrevemos esta equação como

$$\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{e^{-t}}{t} dt. \quad (1.2)$$

Integrando ambos os lados temos

$$\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} = \int \frac{e^{-t}}{t} dt + C. \quad (1.3)$$

Notemos a integral no lado direito da eq. (1.3) não pode ser resolvida exatamente. Mesmo assim podemos aplicar a condição inicial:

$$\sqrt{u(t)} = \int_1^t \frac{e^{-t}}{t} dt + 2$$

ou

$$u(t) = \left[\int_1^t \frac{e^{-t}}{t} dt + 2 \right]^2.$$

Esta integral pode ser calculada numericamente para qualquer t :

```
> u:=tau->(Int(exp(-t)/t,t=1..tau)+2)^2;
```

$$u := \tau \rightarrow \left(\int_1^{\tau} \frac{e^{-t}}{t} dt + 2 \right)^2 \quad (5)$$

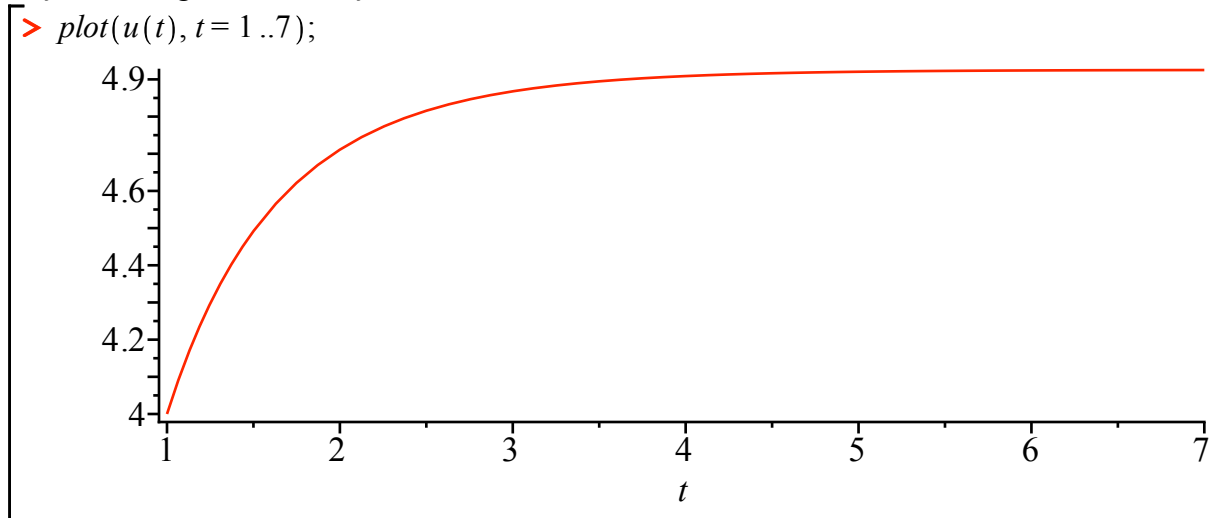
```
> u(3);
```

$$\left(\int_1^3 \frac{e^{-t}}{t} dt + 2 \right)^2 \quad (6)$$

```
> evalf(u(3));
```

$$4.867916572 \quad (7)$$

Façamos um gráfico da função:



O valor de $u(t)$ parece tender a uma constante. De fato,

```
> Int(exp(-t)/t, t = 1 .. infinity);
```

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (8)$$

```
> i1 := evalf(%);
```

$$i1 := 0.2193839344 \quad (9)$$

de modo que valor limite é:

```
> (i1+2)^2;
```

$$4.925665046 \quad (10)$$

Resolvamos a equação diferencial diretamente no Maple:

```
> restart;
```

```
> eq:=diff(u(t),t)=2*sqrt(u(t))*exp(-t)/t;
```

$$eq := \frac{d}{dt} u(t) = \frac{2\sqrt{u(t)} e^{-t}}{t} \quad (11)$$

```
> sol:=dsolve({eq,u(1)=4});
```

$$sol := u(t) = \text{Ei}(1, t)^2 - 4 \text{Ei}(1, t) - 2 \text{Ei}(1, t) \text{Ei}(1, 1) + 4 + 4 \text{Ei}(1, 1) + \text{Ei}(1, 1)^2 \quad (12)$$

```
> uu:=rhs(sol);
```

$$uu := \text{Ei}(1, t)^2 - 4 \text{Ei}(1, t) - 2 \text{Ei}(1, t) \text{Ei}(1, 1) + 4 + 4 \text{Ei}(1, 1) + \text{Ei}(1, 1)^2 \quad (13)$$

Avaliemos a função em $t = 3$:

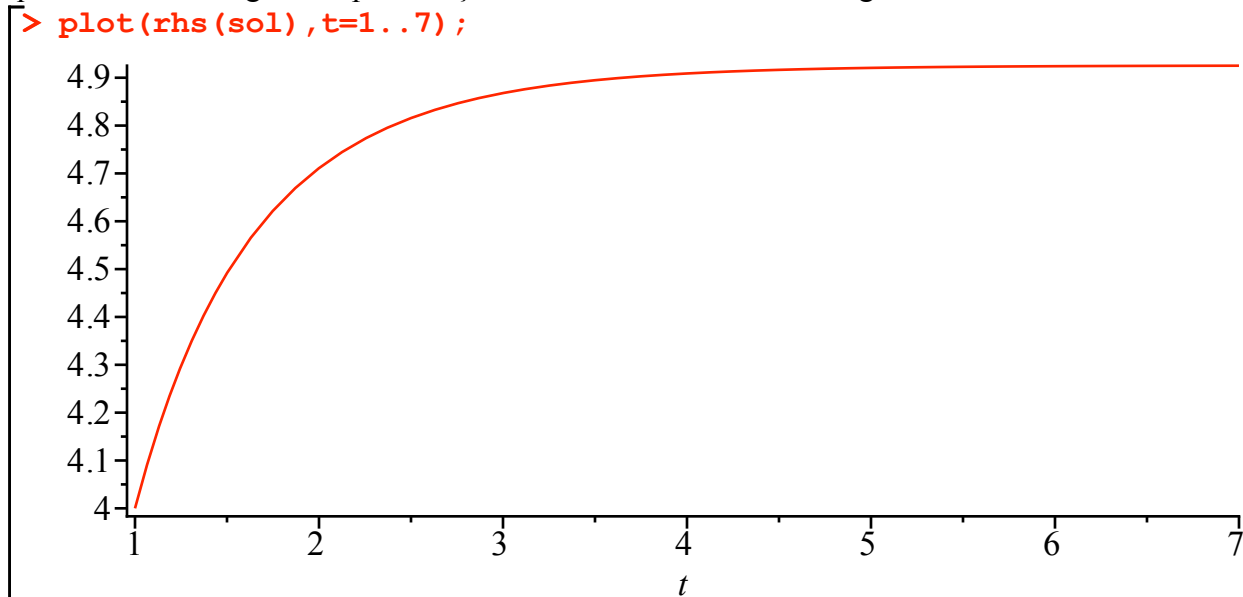
```
> uu:=unapply(uu,t);
```

$$uu := t \rightarrow \text{Ei}(1, t)^2 - 4 \text{Ei}(1, t) - 2 \text{Ei}(1, t) \text{Ei}(1, 1) + 4 + 4 \text{Ei}(1, 1) + \text{Ei}(1, 1)^2 \quad (14)$$

```
> evalf(uu(3));
```

$$4.867916575 \quad (15)$$

que concorda com grande aproximação com o resultado anterior. O gráfico é mostrado abaixo:



que coincide com o gráfico anterior.

2. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = -y^2 e^{-x^2}, \quad y(0) = \frac{1}{2}. \quad (2.1)$$

Solução

Reescrevamos a EDO da seguinte forma:

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 e^{-x^2}, \quad (2.2)$$

ou, separando e integrando ambos os lados,

$$\int \frac{1}{y^2} dy = -\frac{1}{y} = -\int e^{-x^2} dx + C, \quad (2.3)$$

ou

$$y = \frac{1}{\int e^{-x^2} dx + C}.$$

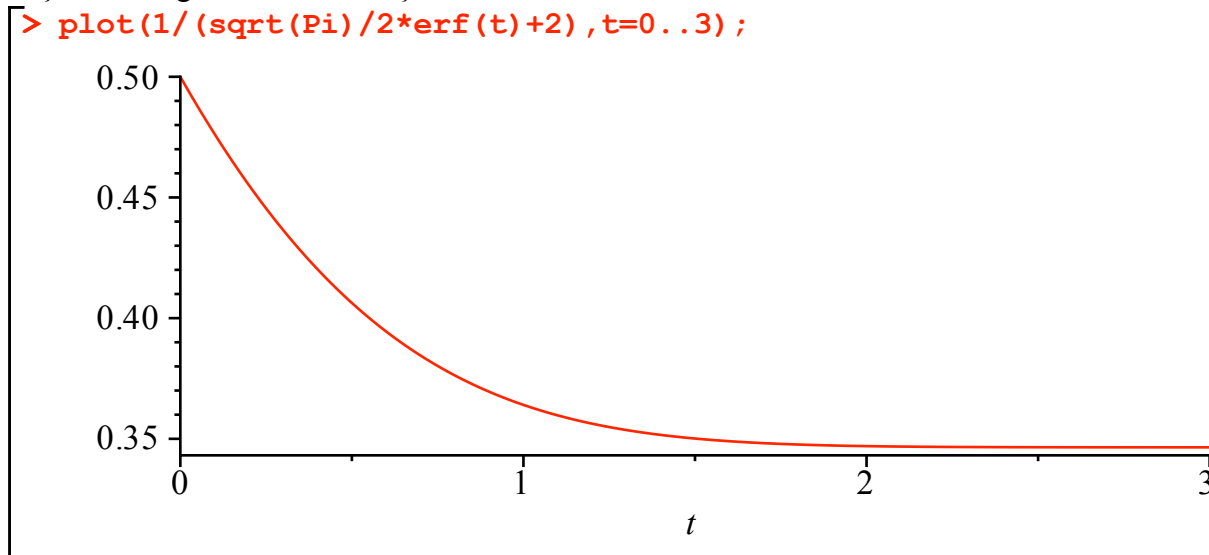
A integral no denominador não tem primitiva, mas pode ser expressa em termos da função erro:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds. \quad (2.4)$$

Temos então,

$$y = \frac{1}{\int_0^t e^{-s^2} ds + 2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(t) + 2} \quad (2.5)$$

Façamos um gráfico desta solução:



Resolvamos este problema diretamente no Maple:

```
> eq:=diff(y(x),x)=-y(x)^2*exp(-x^2);
```

$$eq := \frac{d}{dx} y(x) = -y(x)^2 e^{-x^2} \quad (16)$$

```
> dsolve({eq,y(0)=1/2});
```

$$y(x) = \frac{2}{4 + \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x)} \quad (17)$$

3. Resolva a equação

$$u' = -\frac{u}{t} + \frac{1}{u^2 t}, \quad (3.1)$$

Solução

Reescrevamos a EDO da seguinte forma:

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{t} u = \frac{1}{t} u^{-2}. \quad (3.2)$$

Esta é uma equação de Bernoulli. Dividindo toda a equação por u^{-2} temos

$$u^2 \frac{du}{dt} + \frac{1}{t} u^3 = \frac{1}{t} \quad (3.3)$$

Definindo uma nova variável

$$w = u^3, \quad (3.4)$$

temos

$$\frac{dw}{dt} = 3 u^2 \frac{du}{dt}, \quad (3.5)$$

de modo que a equação diferencial toma a forma:

$$\frac{1}{3} \frac{dw}{dt} + \frac{1}{t} w = \frac{1}{t}. \quad (3.6)$$

ou

$$\frac{dw}{dt} + \frac{3}{t} w = \frac{3}{t}. \quad (3.7)$$

Para resolver esta equação linear, definimos

$$w(x) = f(x) v(x). \quad (3.8)$$

onde

$$v(x) = \exp\left(-\int \frac{3}{t} dt\right) = \exp(-3 \ln t) = \frac{1}{t^3}, \quad (3.9)$$

$$f(x) = \int \frac{\left(\frac{3}{t}\right)}{\frac{1}{t^3}} dt + C = 3 \int t^2 dt + C = t^3 + C. \quad (3.10)$$

Portanto,

$$w(t) = f(t) v(t) = \frac{1}{t^3} (t^3 + C) = 1 + \frac{C}{t^3}, \quad (3.11)$$

ou

$$u(t)^3 = 1 + \frac{C}{t^3}. \quad (3.12)$$

4. Resolva a equação

$$(y^2 + \ln x) y' + \frac{y}{x} + x^3 = 0, \quad (1)$$

Solução

Reescrevamos a EDO da seguinte forma:

$$\left(\frac{y}{x} + x^3\right) dx + (y^2 + \ln x) dy = 0. \quad (2)$$

Sejam

$$M = \frac{y}{x} + x^3 \text{ e } N = y^2 + \ln x. \quad (3)$$

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} \text{ e } \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{x}. \quad (4)$$

a equação é exata, de modo que devemos encontrar uma solução $F = \text{const.}$ onde

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M = \frac{y}{x} + x^3, \quad (5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N = y^2 + \ln x. \quad (6)$$

Integrando parcialmente (5) temos

$$F = \frac{y^3}{3} + y \ln x + \phi(x). \quad (7)$$

Substituindo (7) em (5) temos

$$\frac{y}{x} + \phi'(x) = \frac{y}{x} + x^3 \quad (8)$$

ou

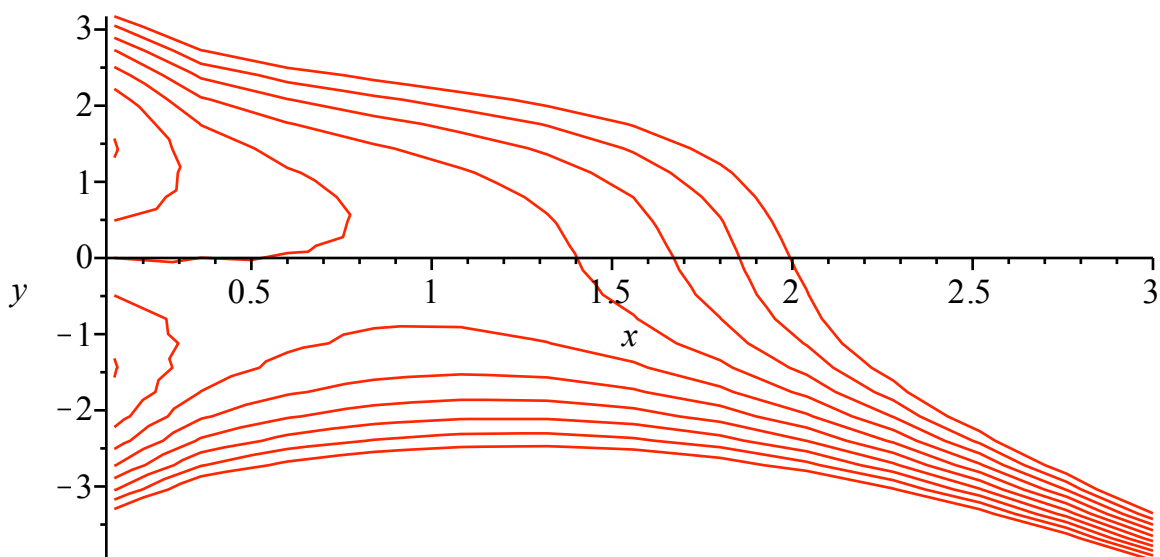
$$\phi'(x) = x^3, \quad \phi(x) = \frac{x^4}{4}, \quad (9)$$

de modo que $F = \frac{y^3}{3} + y \ln x + \frac{x^4}{4}$ e a solução é

$$\frac{y^3}{3} + y \ln x + \frac{x^4}{4} = C. \quad (10)$$

Façamos os gráficos de algumas curvas integrais:

```
> with(plots) :
> i:=0:
> for C from -5 to 5 do
p[i]:=implicitplot((1/3)*y^3+y*ln(x)+(1/4)*x^4 = C,x=0..3,y=-4..4);
i:=i+1
od:
display(seq(p[k],k=0..9));
```



5. Considere um sistema massa-mola linear sem amortecimento. Suponha que o corpo tem massa m e a constante da mola é κ . Formule cuidadosamente o problema da dinâmica do sistema e determine a velocidade $v(x)$ em termos da posição do corpo. Suponha que $v(x=0) = v_0$.

Solução

Se x é a posição relativa ao ponto de equilíbrio, temos, de acordo com a segunda lei de Newton,

$$m \frac{dv}{dt} = -\kappa x,$$

ou

$$m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = m \frac{dv}{dx} v = -\kappa x.$$

Esta equação é separável:

$$\int dv v = -\frac{\kappa}{m} \int x dx,$$

ou

$$v^2 = -\frac{\kappa}{m} x^2 + C.$$

Da condição $v(x=0) = v_0$, temos

$$v_0^2 = C,$$

de modo que

$$v^2 = v_0^2 - \frac{\kappa}{m} x^2,$$

ou

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 - \frac{\kappa}{m} x^2}.$$