

Solução de uma EDO linear com série de potências: coeficientes não polinomiais

Notas complementares para o vídeo: <http://www.youtube.com/watch?v=778VOIAya8s>
Fernando Deeke Sasse

Resolva o problema de valor inicial utilizando uma aproximação em série de potências:

$$y'' + y \sin x = x, \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = 0. \quad (1)$$

Solução

Suponhamos que a solução é da forma:

$$y = \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - \pi)^n = a_0 + a_1(x - \pi) + a_2(x - \pi)^2 + \dots \quad (2)$$

Portanto,

$$a_0 = \phi(\pi) = 1, \quad a_1 = \phi'(\pi) = 0. \quad (3)$$

Os outros coeficientes da série podem ser dados por

$$a_n = \frac{\phi^{(n)}(\pi)}{n!}. \quad (4)$$

As derivadas de ordem superior podem ser obtidas a partir da equação diferencial (1). A segunda ordem é obtida imediatamente:

$$\phi'' = x - \phi \sin x, \quad (5)$$

de modo que

$$\phi''(\pi) = \pi - \phi(\pi) \sin \pi = \pi \quad (6)$$

e

$$a_2 = \frac{\phi''(\pi)}{2!} = \frac{\pi}{2}. \quad (7)$$

Diferenciando (5) temos

$$\phi''' = 1 - \phi \cos x - \phi' \sin x. \quad (8)$$

e

$$\phi'''(\pi) = 1 - \phi(\pi) \cos \pi - \phi'(\pi) \sin \pi = 1 - 1(-1) = 2, \quad (9)$$

de modo que

$$a_3 = \frac{\phi'''(\pi)}{3!} = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}. \quad (10)$$

Similarmente, para calcular a_4 e a_5 ,

$$\phi^{(iv)} = \phi \sin x - 2\phi' \cos x - \phi'' \sin x \quad (11)$$

$$\phi^{(iv)}(\pi) = \phi(\pi) \sin \pi - 2\phi'(\pi) \cos \pi - \phi''(\pi) \sin \pi = 0. \quad (12)$$

$$a_4 = \frac{\phi^{(iv)}(\pi)}{4!} = 0. \quad (13)$$

$$\phi^{(v)} = \phi \cos x + 3\phi' \sin x - 3\phi'' \cos x - \phi''' \sin x. \quad (14)$$

$$\phi^{(v)}(\pi) = \phi(\pi) \cos \pi + 3\phi'(\pi) \sin \pi - 3\phi''(\pi) \cos \pi - \phi'''(\pi) \sin \pi = -1 + 3\pi.$$

$$a_5 = \frac{-1 + 3\pi}{5!}. \quad (15)$$

Portanto, a série é dada por

$$y(x) = 1 + \frac{\pi}{2}(x - \pi)^2 + \frac{1}{3}(x - \pi)^3 + \frac{-1 + 3\pi}{5!}(x - \pi)^5 + \dots \quad (16)$$

Como todos os coeficientes da eq. (1) são analíticos para todo x , o raio de convergência desta série é infinito.

Resolvamos este problema de forma automática no Maple:

```
> eq:=diff(y(x),x$2)+y(x)*sin(x)=x;
```

$$eq := \frac{d^2}{dx^2} y(x) + y(x) \sin(x) = x \quad (1)$$

```
> ics:=y(Pi)=1,D(y)(Pi)=0:
```

```
> Order:=10:
```

```
> sol_series:=dsolve({eq,ics},y(x),series);
```

```
sol_series := y(x) = 1 + \frac{1}{2} \pi (x - \pi)^2 + \frac{1}{3} (x - \pi)^3 + \left(-\frac{1}{120} + \frac{1}{40} \pi\right) (x - \pi)^5
```

$$+ \frac{1}{90} (x - \pi)^6 + \left(\frac{1}{5040} - \frac{1}{504} \pi\right) (x - \pi)^7 + \left(-\frac{23}{20160} + \frac{1}{2240} \pi\right) (x - \pi)^8$$

$$+ \left(\frac{11}{72576} + \frac{1}{17280} \pi\right) (x - \pi)^9 + O((x - \pi)^{10}) \quad (2)$$

```
> Ys:=convert(rhs(sol_series),polynom):
```

Geramos agora o gráfico desta solução:

```
> with(plots):
```

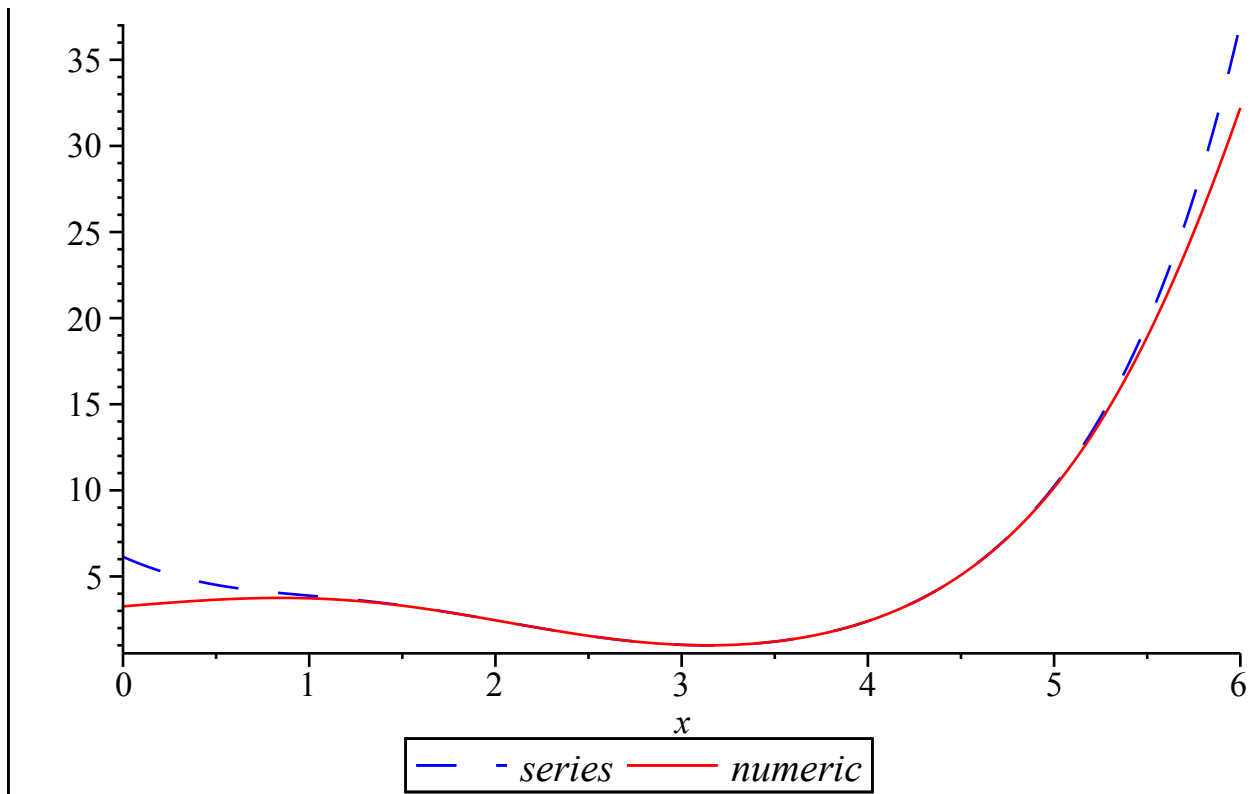
```
> p1:=plot(Ys,x=0..6,color=blue, legend=series, linestyle=
spacedash):
```

Façamos agora o gráfico da solução numérica e comparemos com o correspondente da solução em série de potências:

```
> sol_numer := dsolve({eq, ics}, y(x), numeric):
```

```
> p2 := odeplot(sol1, [x, y(x)], 0 .. 6, color = red, legend =
numeric, linestyle = solid):
```

```
> display([p1,p2]);
```



A concordância entre as duas soluções é boa nas vizinhanças de $x = \pi$.