

EDI - ENGENHARIA MECÂNICA
Prof. Fernando Deeke Sasse
Departamento de Matemática - UDESC
EXERCÍCIOS PROPOSTOS - 15/08/2011

1. O isótopo radioativo tório-234 desintegra-se a uma taxa proporcional à sua massa em cada instante. Se 100 mg deste material são reduzidos a 82.04 mg em uma semana, determinar a relação que expressa a massa em função do tempo. A partir disso calcular o tempo necessário para que a massa decaia à metade do seu valor original. De acordo com a informação dada acima, a taxa de desintegração da massa M do material é dada por

$$\frac{dM}{dt} = -\kappa M, \quad (1)$$

onde $\kappa > 0$ é a constante de decaimento, M é dado em miligramas e t em dias. Devemos encontrar uma solução para de (1) satisfazendo a condição inicial.

$$M(0) = 100, \quad (2)$$

assim como

$$M(7) = 82.04. \quad (3)$$

A solução geral de (1) é dada por

$$M(t) = Ce^{-\kappa t}, \quad (4)$$

onde C é uma constante a ser determinada a partir da condição inicial. De fato, $M(0) = 100 = C$, de modo que

$$M(t) = 100e^{-\kappa t}. \quad (5)$$

A condição adicional (3) pode ser utilizada para determinar a constante de decaimento κ :

$$M(7) = 100e^{-\kappa 7} = 82.04, \quad (6)$$

ou

$$\kappa = \frac{\ln 0.8204}{7} = 0.02828 \text{ dias}^{-1}, \quad (7)$$

Portanto,

$$M(t) = 100e^{0.02828t} \text{ mg}. \quad (8)$$

O período de tempo necessário para que a massa se reduza à metade do seu valor original é denominado *meia-vida* do material. Seja τ o tempo necessário para que a massa se reduza a 50 mg. Da eq. (8) temos então que $\tau = 24.5$ dias.

Com base no exemplo acima, resolva agora o seguinte problema. Em 1947 uma grande coleção de pergaminhos de papiro, incluindo a versão mais antiga conhecida do Velho Testamento, foi encontrada em uma caverna próxima ao Mar Morto. Eles ficaram conhecidos como os "Pergaminhos do Velho Testamento", ou também "Manuscritos do Velho Testamento". O pergaminho contendo o livro de Isaías foi datado em 1994 usando a técnica de radiocarbono. Foi determinado que ele continha entre 75% e 77% da quantidade inicial de carbono-14. Em torno de que data o pergaminho foi escrito?

2. Uma curva passando pelo ponto $(1, 0)$ tem inclinação $\ln x$. Qual é a equação da curva?

3. Resolva as equações:

$$(i) \quad (x^2 + 1) \frac{dx}{dy} + 4xy = 12x,$$

$$(ii) \quad (x^2 + 1)y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} + \frac{y}{x}, y(1) = 2,$$

$$(iii) \quad (x^2 + 1)xy' = 2xy + 3y^4, y(1) = 0,$$

$$(iv) \quad e^{-y} \sec x + 2 \cot x - e^{-y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Esboce o gráfico da família de soluções.

4. Quais das seguintes equações diferenciais têm soluções únicas (ao menos em algum pequeno intervalo de tempo) para qualquer condição inicial não-negativa ($x(0) \geq 0$)?

(i) $\dot{x} = x(1 - x^2),$

(ii) $\dot{x} = x^{1/2}(1 + x)^2.$

5. **Equações de Riccati.** A equação

$$\frac{dy}{dx} = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2$$

é denominada equação de Riccati. Suponha que uma particular solução y_1 desta equação seja conhecida. Uma solução mais geral, contendo uma constante arbitrária, pode ser obtida através da substituição

$$y = y_1(x) + \frac{1}{v(x)}.$$

Mostre que $v(x)$ satisfaz a equação linear de primeira ordem

$$\frac{dv}{dx} = -(q_2 + 2q_3 y_1)v - q_3.$$

6. Utilize o método do problema anterior para resolver as seguintes equações de Riccati:

(a) $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2, \quad y_1(x) = x,$

(b) $y' = -1/x^2 - y/x + y^2, \quad y_1(x) = 1/x,$

(c) $y' = (2 \cos^2 x - \sin^2 x + y^2)/(2 \cos x), \quad y_1(x) = \sin(x).$