

Distribuição de Erlang

Uma variável **aleatória exponencial** descreve a distância até que a primeira contagem é obtida em um processo de Poisson.

Generalização da distribuição exponencial :

O **comprimento** até que r contagens ocorram em um processo de Poisson.

Variável aleatória de Erlang



Exemplo. As falhas de grandes unidades processadoras de grandes sistemas computacionais são frequentemente modeladas como um processo de Poisson.

Tipicamente falhas não são causadas por desgaste de componentes e sim por falhas aleatória de um grande número de circuitos semicondutores nas unidades.

Suponha que

- as unidades que falham são imediatamente consertadas.
- o número médio de falhas por hora é 0.0001
- X : tempo até que 4 falhas ocorram.

Determine

$$P(X > 40000)$$

Seja N o número de falhas em 40000 h de operação.

O tempo até 4 falhas excede 40000 h se e somente se o número de falhas in 40000 h é 3 ou menos.

$$P(X > 40000) = P(N \leq 3)$$

A suposição de que as falhas seguem um processo de Poisson implica que N tem uma distribuição de Poisson com

$$\lambda = E(N) = Np = 40000(0.0001) = 4(\text{falhas por } 4000h)$$

Dist. Poisson:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

Portanto,

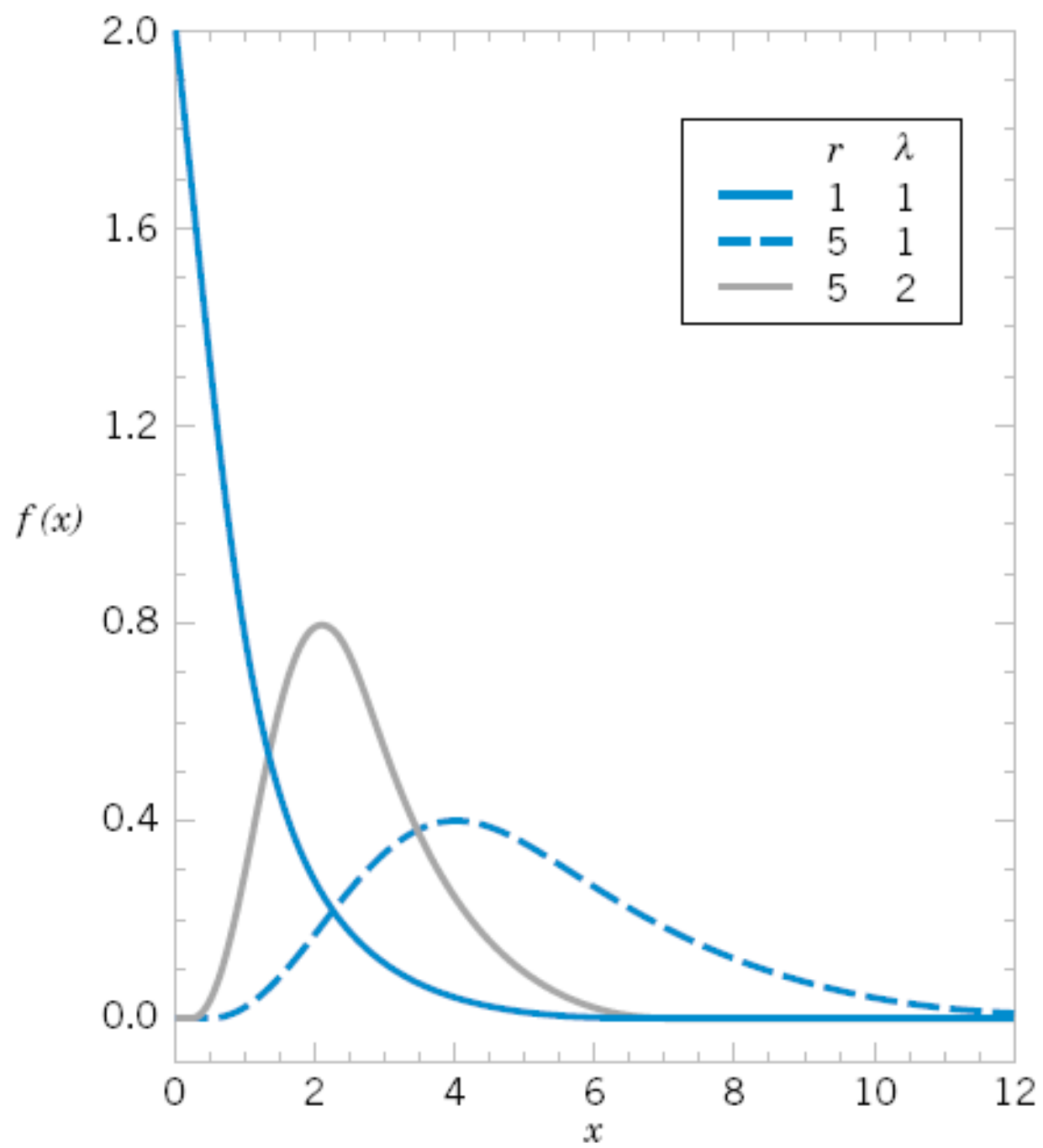
$$P(x > 40000) = P(N \leq 3) = \sum_{k=0}^3 \frac{e^{-4} 4^k}{k!} = 0.433$$

Definição. A variável aleatória X que é igual ao intervalo de comprimento até que r contagens ocorram em um processo de Poisson com média

$$\lambda > 0,$$

é uma variável aleatória X de **Erlang** com parâmetros λ e r , com densidade de probabilidade dada por

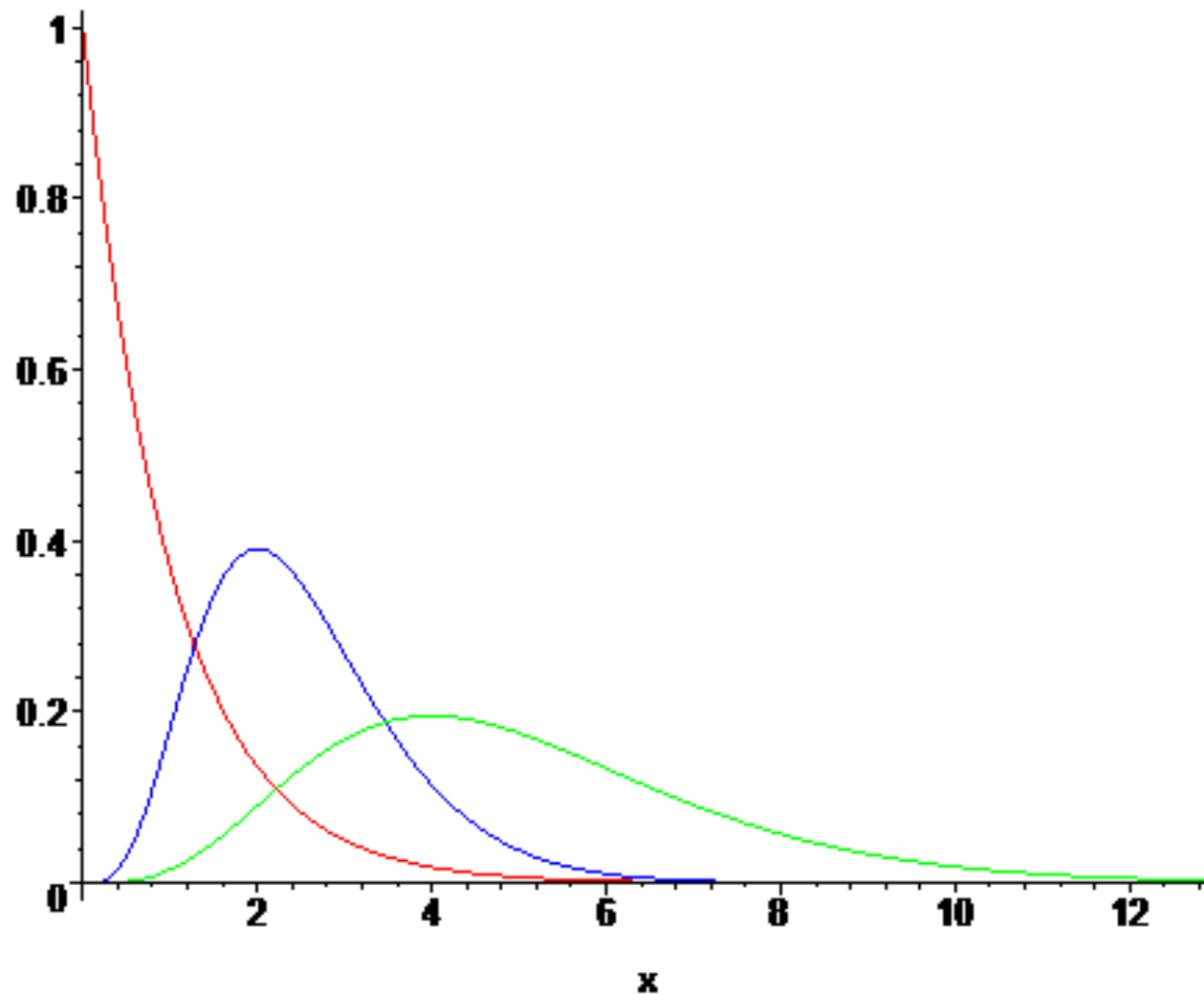
$$f(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!}, \quad x > 0, \quad r = 1, 2, \dots$$



```
> f := (x, r, lambda) -> lambda^r * x^(r-1) * exp(-lambda*x) / (r-1)!;
```

$$f := (x, r, \lambda) \rightarrow \frac{\lambda^r x^{(r-1)} e^{(-\lambda x)}}{(r-1)!}$$

```
> plot([f(x,1,1), f(x,5,1), f(x,5,2)], x=0..13, color=[red, green, blue]);
```



Notemos que

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!} dx = \frac{\Gamma(r)}{(r-1)!}$$

parte real de z

onde

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \text{Re}(z) > 0$$

É a [função gama](#) que é [tabelada](#). Se $z = n$ é inteiro,

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Como r é inteiro,

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!} dx = 1$$

Comprovamos os resultados anteriores no Maple:

```
> f := (x, r, lambda) -> lambda^r * x^(r-1) * exp(-lambda*x) / (r-1) ! ;
```

$$f := (x, r, \lambda) \rightarrow \frac{\lambda^r x^{(r-1)} e^{(-\lambda x)}}{(r-1)!}$$

```
> assume (lambda > 0) ;
```

```
> I1 := int (f (x, r, lambda) , x=0 .. infinity) ;
```

$$I1 := \frac{\Gamma(r)}{(r-1)!}$$

```
> assume (r :: integer) ;
```

```
> simplify (I1, GAMMA) ;
```

Notemos ainda que

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!} dx = \frac{\Gamma(r, \lambda x_0)}{(r-1)!}$$

onde

$$\Gamma(a, z) = \int_z^{\infty} e^{-t} t^{(a-1)} dt$$

é denominada função [gama incompleta](#). Tal função também é [tabelada](#).

No Maple,

> `f := (x, r, lambda) -> lambda^r * x^(r-1) * exp(-lambda*x) / (r-1) ! ;`

$$f := (x, r, \lambda) \rightarrow \frac{\lambda^r x^{(r-1)} e^{(-\lambda x)}}{(r-1)!}$$

> `assume (lambda > 0) ;`

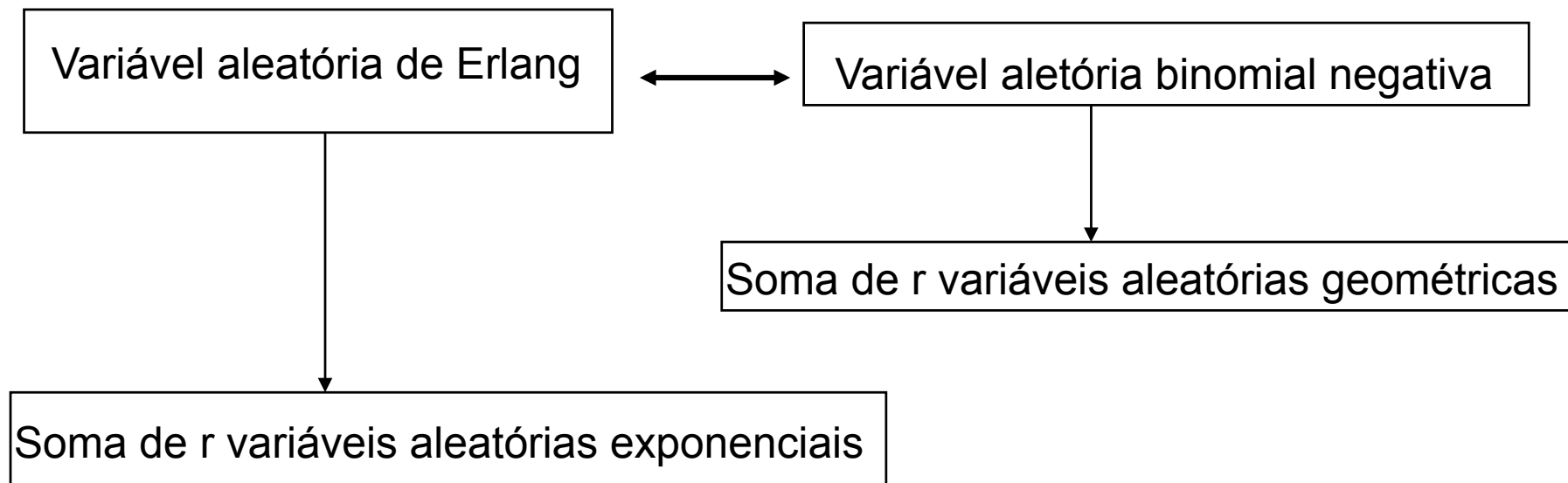
> `assume (x0 > 0) ;`

> `int (f (x, r, lambda) , x=x0 .. infinity) ;`

$$\frac{\Gamma(r, \lambda \sim x0 \sim)}{(r-1)!}$$

Resolução do exemplo anterior:

$$\begin{aligned} P(X > 40000) &= \int_{40000}^{\infty} f(x) dx = \int_{40000}^{\infty} \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!} dx \\ &= \int_{40000}^{\infty} \frac{0.0001^4 x^{4-1} e^{-0.0001x}}{(4-1)!} dx = \frac{\Gamma(4, 4)}{3!} = \frac{2.600821}{3!} = 0.4335 \end{aligned}$$



Valor esperado e variância da variável aleatória de Erlang

$$\mu = E(X) = \frac{r}{\lambda}, \quad \sigma^2 = V(X) = \frac{r}{\lambda^2}$$

> `assume (lambda>0) ;`

> `int (x*f (x, r, lambda) , x=0..infinity) ;`

$$\int_0^{\infty} x f(x, r, \lambda) dx$$

$$\frac{\Gamma(r+1)}{\lambda \cdot (r-1)!}$$

> `mu:=simplify(% , GAMMA) ;`

$$\mu := \frac{r}{\lambda}$$

```
> int((x-mu)^2*f(x,r,lambda),x=0..infinity);
```

$$\int_0^{\infty} (x - \mu)^2 f(x, r, \lambda) dx$$
$$\frac{\Gamma(2+r)}{\lambda^2 (r-1)!} - \frac{2r\Gamma(r+1)}{\lambda^2 (r-1)!} + \frac{r^2\Gamma(r)}{\lambda^2 (r-1)!}$$

```
> simplify(%, GAMMA);
```

$$\frac{r}{\lambda^2}$$

Distribuição Gama

- Generalização da distribuição de Erlang para r não inteiro

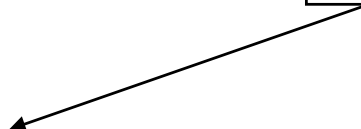
$$f(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!}, \quad x > 0, \quad r = 1, 2, \dots$$

$$f(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}, \quad x > 0, \quad r = 1, 2, \dots$$

$r > 0, \lambda > 0$

$$f(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}, \quad x > 0, r > 0, \lambda > 0$$

função gama


$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{r-1} dt, \quad r > 0$$

Propriedades:

$$\Gamma(r) = (r - 1)\Gamma(r - 1)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

$$\Gamma(1) = 0! = 1$$

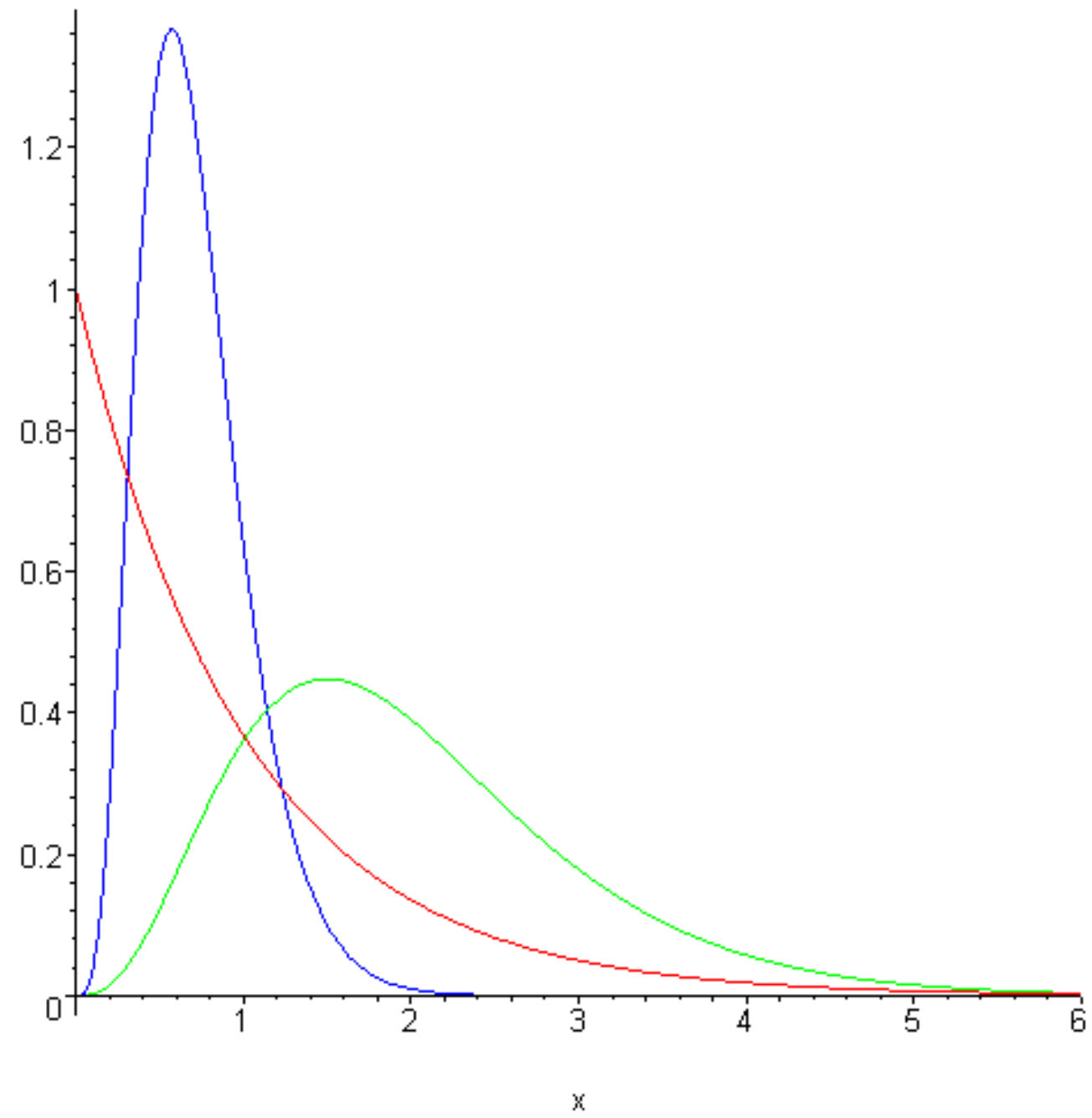
n inteiro



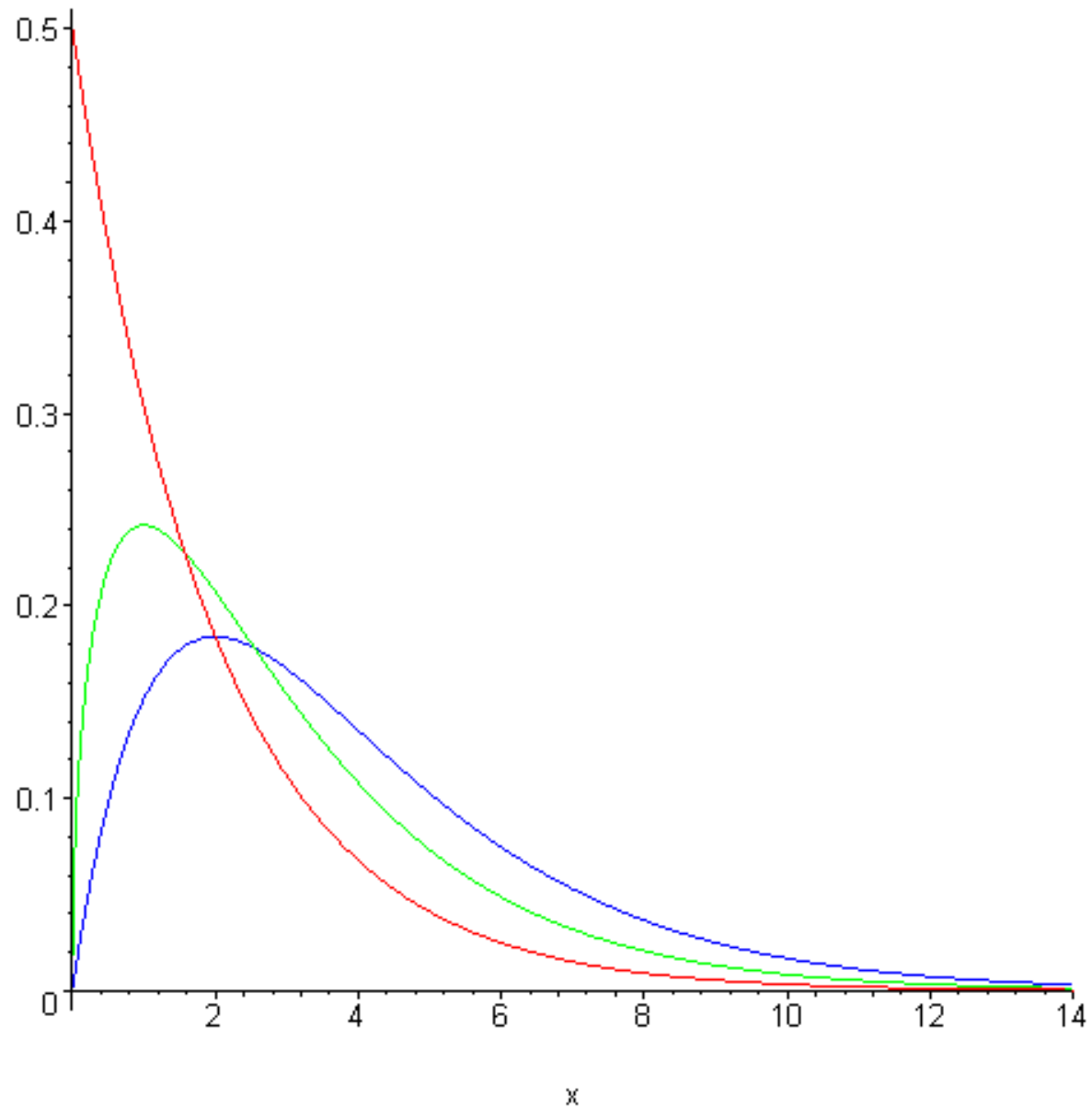
$$f(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}, \quad x > 0, \quad r = 1/2, 1, 3/2, \dots, \quad \lambda = 1/2$$

Distribuição χ - quadrado

```
> plot([f(x,1,1),f(x,4,2),f(x,5,7)],x=0..6, color=[red,green,blue]);
```



```
> plot([f(x,1,1/2),f(x,3/2,1/2),f(x,2,1/2)],x=0..14,  
color=[red,green,blue]);
```



Distribuição de Weibull

Distribuição usada para modelar o tempo até uma falha em diversos sistemas físicos.

Número de falhas
aumenta com o tempo

Número de falhas
decrece com o tempo
(alguns semi-condutores)

Número de falhas
permanece constante
(falhas por causas
aleatórias)

Definição. A variável aleatória X com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{\beta}{\delta} \left(\frac{x}{\delta} \right)^{\beta-1} e^{-(x/\delta)^\beta}, \quad x > 0$$

é uma variável aleatória de Weibull, onde

$$\delta > 0$$

← parâmetro de escala

$$\beta > 0$$

← parâmetro de forma

Função de distribuição cumulativa:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = 1 - e^{-(x/\delta)^\beta}$$

Prova:

> `fwb := (x, beta, delta) -> (beta/delta) * (x/delta) ^ (beta-1) * exp(- (x/delta) ^beta) ;`

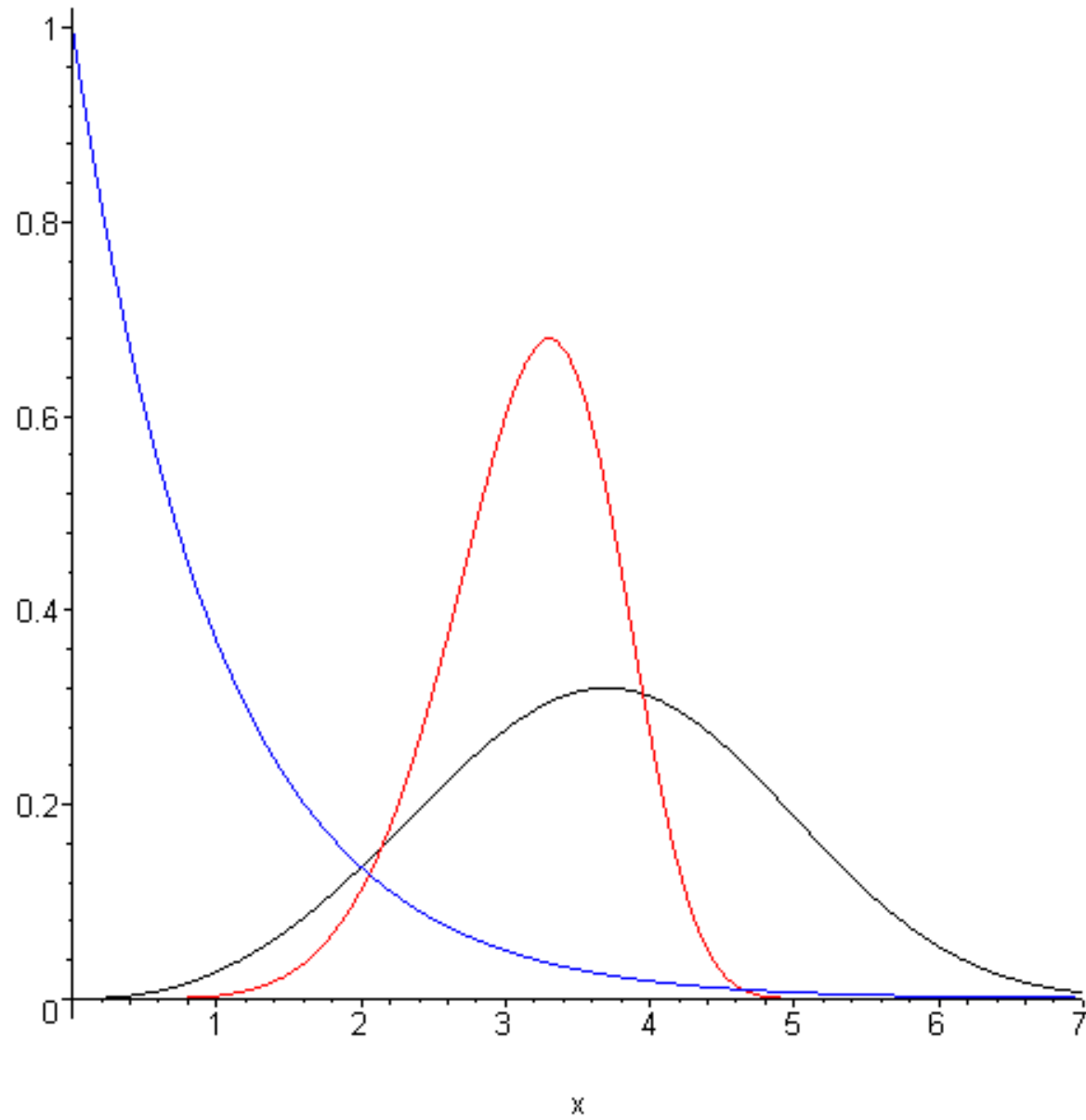
$$f_{wb} := (x, \beta, \delta) \rightarrow \frac{\beta \left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^\beta}}{\delta}$$

> `assume (beta>0) ; assume (delta>0) ;`

> `int (fwb (t, beta, delta) , t=0 .. x) ;`

$$1 - e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^\beta}$$

```
> plot([fwb(x,1,1),fwb(x,6.2,3.4),fwb(x,3.4,4.1)],  
x=0..7,color=[blue,red,black]);
```



Média e Variância

$$\mu = E(X) = \delta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$\sigma^2 = V(X) = \delta^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \delta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^2$$

> mu:=int(t*fwb(t,beta,delta),t=0..infinity);

$$\mu := \delta_{\sim} \Gamma\left(\frac{1 + \beta_{\sim}}{\beta_{\sim}}\right)$$

> int((t-mu)^2*fwb(t,beta,delta),t=0..infinity);

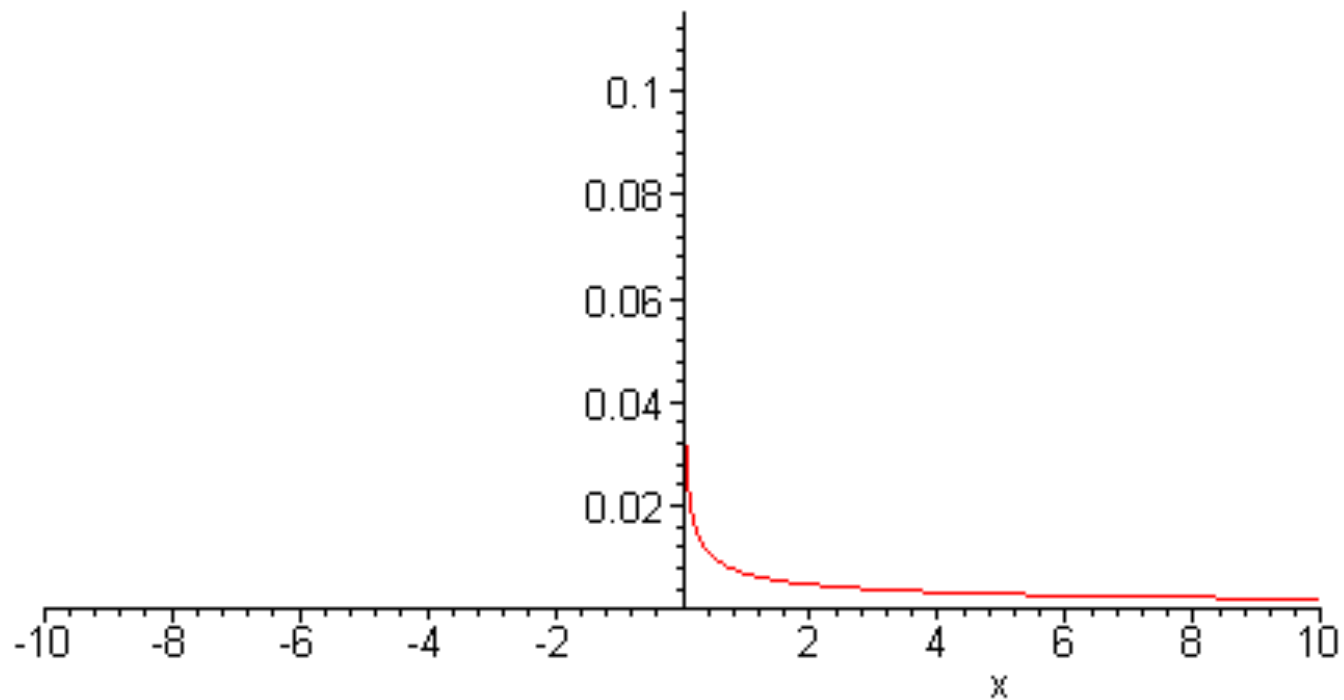
$$-\delta_{\sim}^2 \left(-\Gamma\left(\frac{2 + \beta_{\sim}}{\beta_{\sim}}\right) + \Gamma\left(\frac{1 + \beta_{\sim}}{\beta_{\sim}}\right)^2 \right)$$

Exemplo. O tempo de falha de um mancal em um eixo mecânico é modelado por uma variável aleatória de Weibull com

$$\beta = \frac{1}{2} \qquad \delta = 5000 h$$

Determine tempo médio até a falha.

```
> plot(fwb(x, 1/2, 5000)) ;
```



$$E(X) = 5000 \Gamma(1 + 1 / 0.5) = 5000 \Gamma(3) = 5000(2!) = 10000h$$

Determine a probabilidade de que o mancal dure pelo menos 6000h.

$$\begin{aligned} P(x > 6000) &= 1 - F(6000) = \exp\left[-\left(\frac{6000}{5000}\right)^{1/2}\right] \\ &= e^{-1.095} = 0.334 \end{aligned}$$

Ou seja, 33.4% dos mancais duram pelo menos 6000h.