Métodos Numéricos para Equações Diferenciais

Fernando Deeke Sasse
Departamento de Matemática, UDESC - Joinville
2008/2

Um exemplo de aplicação do método de Euler

Consideremos o problema de valor inicial:

$$\frac{d}{dx}\,y(x) + \frac{y(x)}{x} - x = 0 \quad , \qquad y(0.5) = 1\ .$$

Sua solução exata é dada por

```
> restart:
```

```
> eq:= diff(y(x),x)+y(x)/x-x^3*cos(x)^2 = 0;
```

$$eq := \frac{d}{dx}\,y(x) + \frac{y(x)}{x} - x^3\cos(x)^2 = 0 \qquad (1)$$

```
> Sol_exata:=dsolve( {eq, y(1)=1}, y(x));
```

$$Sol\_exata := y(x) = \frac{1}{40}\,\frac{1}{x}\left(10\,x^4\sin(2\,x) + 20\,x^3\cos(2\,x) - 30\,x^2\sin(2\,x) + 15\sin(2\,x) - 30\,x\cos(2\,x) + 4\,x^5 + 36 + 5\sin(2) + 10\cos(2)\right) \qquad (2)$$

Vamos agora resolver este PVI pelo método de Euler e comparar com o resultado exato. Vamos tomar o intervalo I = [0.5,45], com

60 divisões . Portanto,

```
> M:=60:X:=45:
```

```
> h:=(X-0.5)/M; y[0]:=1.; x[0]:=0.5;
```

$$h := 0.7416666667$$
$$y_0 := 1.$$
$$x_0 := 0.5 \qquad (3)$$

```
> f:=(-y/x+x^3*cos(x)^2);
```

$$f := -\frac{y}{x} + x^3\cos(x)^2 \qquad (4)$$

```
> F:=unapply(f,x,y);
```

$$F := (x, y) \rightarrow -\frac{y}{x} + x^3\cos(x)^2 \qquad (5)$$

```
> L:=[[x[0],y[0]]]:
```

```
> for i from 1 to M do
>    y[i]:=y[i-1]+h*F(x[i-1],y[i-1]);
>    x[i]:=x[0]+i*h;

>    L:=[op(L),[x[i],y[i]]];
```

```
> od:
> print(L);
```

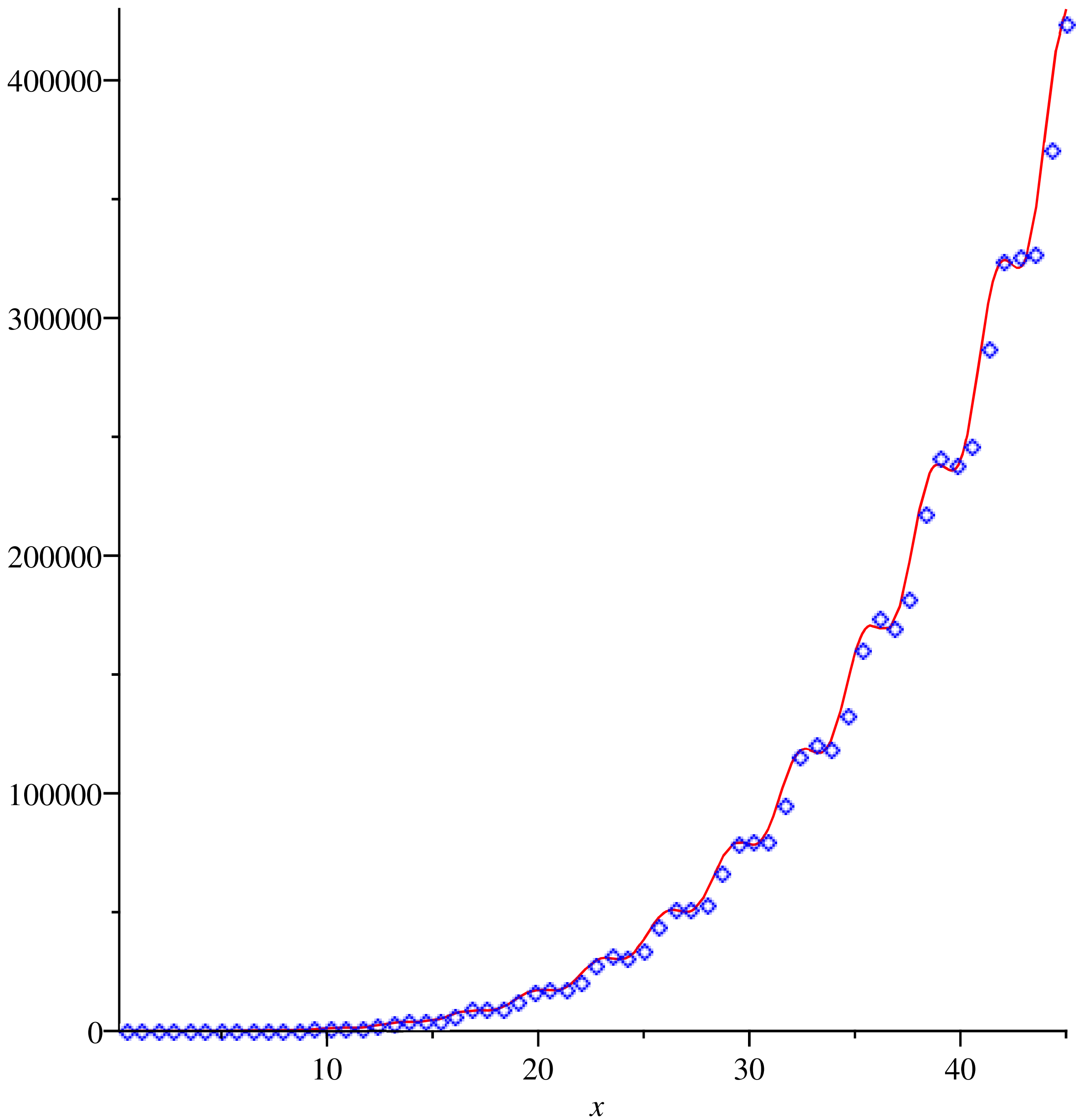
$[[0.5, 1.], [1.241666667, -0.411933904], [1.983333333, -0.0175528356], [2.725000000, 0.9191404256], [3.466666667, 13.21916023], [4.208333334, 38.13827277], [4.950000000, 44.31120481], [5.691666667, 42.65587792], [6.433333334, 131.3260532], [7.175000000, 309.2446609], [7.916666667, 385.3211807], [8.658333334, 350.6667614], [9.400000000, 570.4541533], [10.14166667, 1141.083258], [10.88333333, 1497.288880], [11.62500000, 1407.247355], [12.36666667, 1721.248140], [13.10833333, 2965.523362], [13.85000000, 4023.780289], [14.59166667, 3966.379467], [15.33333333, 4208.873100], [16.07500000, 6321.005179], [16.81666667, 8713.428866], [17.55833333, 9030.195512], [18.30000000, 8954.466614], [19.04166667, 11896.86762], [19.78333333, 16367.45003], [20.52500000, 17785.50538], [21.26666667, 17212.80306], [22.00833333, 20612.77544], [22.75000000, 27822.04780], [23.49166667, 31513.14129], [24.23333333, 30565.63555], [24.97500000, 33714.60118], [25.71666667, 43982.10215], [26.45833333, 51493.82224], [27.20000000, 50859.89899], [27.94166667, 52859.27031], [28.68333333, 65910.26570], [29.42500000, 78940.26668], [30.16666667, 80094.11051], [30.90833333, 80158.39198], [31.65000000, 94960.30963], [32.39166667, 1.149842589\ 10^5], [33.13333333, 1.202718548\ 10^5], [33.87500000, 1.181553846\ 10^5], [34.61666667, 1.329286627\ 10^5], [35.35833333, 1.607386800\ 10^5], [36.10000000, 1.732545636\ 10^5], [36.84166667, 1.697230543\ 10^5], [37.58333334, 1.821872342\ 10^5], [38.32500000, 2.174391922\ 10^5], [39.06666667, 2.406533793\ 10^5], [39.80833334, 2.378862867\ 10^5], [40.55000000, 2.457569494\ 10^5], [41.29166667, 2.866510100\ 10^5], [42.03333334, 3.237991513\ 10^5], [42.77500000, 3.255943545\ 10^5], [43.51666667, 3.272868583\ 10^5], [44.25833334, 3.705068514\ 10^5], [45.00000000, 4.238194621\ 10^5]]$ **(6)**

Vamos agora fazer um gráfico comparativo:

```
> L1:=%:
> with(plots):
> yex:=op(2,Sol_exata);
```

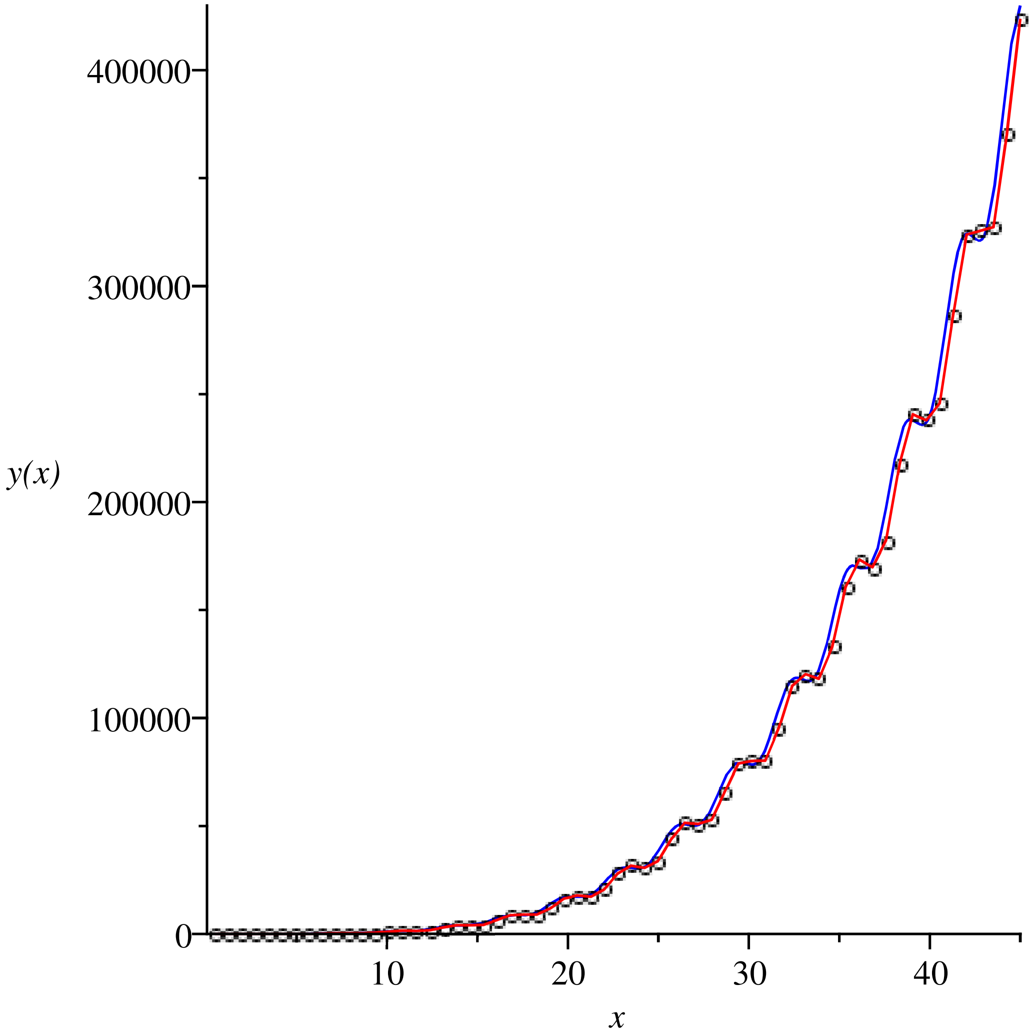
$$yex := \frac{1}{40}\,\frac{1}{x}\left(10\,x^4 \sin(2\,x) + 20\,x^3 \cos(2\,x) - 30\,x^2 \sin(2\,x) + 15 \sin(2\,x) - 30\,x \cos(2\,x) + 4\,x^5 + 36 + 5 \sin(2) + 10 \cos(2)\right) \qquad \textbf{(7)}$$

```
> Y:=unapply(yex,x):
> g1:=plot(yex,x=0.5..X):
> g2:=pointplot(L1,color=blue):
> display(g1,g2);
```



Façamos agora um gráfico similar, traçando uma curva através dos pontos encontrados numericamente:

```
> plot([yex, L1, L1], x = .5 .. X, style = [line, point, line],
  color = [blue, black, red], symbol = circle, labels = [x, `y(x)
  `]);
```



>

Exercício 1: Calule o máximo erro neste intervalo.
Exercício 2 : Determine graficamente o **erro máximo** em termos do número de divisões do intervalo.
Exercício 3 : Determine graficamente o **erro relativo** em termos do passo. Faça diferentes gráficos para diferentes passos. Quais são suas conclusões ?
Exercício 4: Resolva, de todas as formas possíveis, o PVI

$$\frac{d}{dt}\, y(t) + y(t)^2 - t = 0 \quad , \quad \mathrm{y}(0) = 1$$

no intervalo [0,1].