

CDL - LICENCIATURA EM FÍSICA
Prof. Fernando Deeke Sasse
Departamento de Matemática - UDESC
EXERCÍCIOS PARA PROVA 4 - 03/06/2010

- 1.** Uma partícula descreve uma curva descrita por $\mathbf{r} = (\sin t, t^3, t)$. Determine em $t = \pi$:
- (i) As componentes tangencial e normal da aceleração.
 - (ii) A curvatura e a torção.
 - (iii) O vetor velocidade angular de rotação intrínseca $\boldsymbol{\omega}$.
 - (iv) O comprimento de arco descrito pela partícula entre $t = 0$ e $t = 2\pi$.
- 2.** Seja a curva definida por $\mathbf{r} = (t, t^2, t^3)$. No ponto correspondente a $t = 1$, determine:
- (i) As retas tangente, normal e binormal.
 - (ii) O plano normal e o plano osculador.
- 3.** Determine o vetor aceleração de uma partícula que descreve uma trajetória (i) elíptica, (ii) parabólica e (iii) hiperbólica.
- 4.** As equações de movimento de uma partícula lançada horizontalmente com uma velocidade inicial v_0 , sob ação de um campo gravitacional homogêneo é dado por $\{x = v_0t, y = gt^2/2\}$, onde g é a aceleração gravitacional. Determine:
- (i) O vetor aceleração e suas componentes tangencial e centrípeta em função do tempo.
 - (ii) O raio de curvatura em função do tempo.
 - (iii) Se $v_0 = 1m/s$, determine o instante em que a partícula está no ponto em que o raio de curvatura é $R = 1m$.
- 5.** Determine o raio de curvatura médio da cardióide definida em coordenadas polares por $r = 1 - \cos \theta$, entre $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$.
- 6.** Determine a derivada direcional de $f(x, y, z) = xy + x + z^2$ na direção de $P(1, 2, -1)$ a $Q(3, 4, 1)$. Determine também a direção onde a derivada direcional tem seu valor máximo em P e determine sua magnitude.
- 7.** Mostre que
- (i) $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$,
 - (ii) $\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(a^2/2) - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{a}$.
- 8.** Sejam \mathbf{r} o vetor posição, $r = |\mathbf{r}|$, \mathbf{F} um campo vetorial, $\phi(r)$ e $f = f(x, y, z)$ campos escalares. Prove as relações:

$$\nabla \cdot (f \mathbf{F}) = f \nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f, \quad (1)$$

$$\nabla \phi(r) = \frac{d\phi}{dr} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot [\phi(r) \mathbf{r}] = 3\phi(r) + r \frac{d\phi(r)}{dr}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot (r^{n-1} \mathbf{r}) = (n+2)r^{n-1}, \quad (4)$$

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{d^2 \phi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi(r)}{dr}, \quad (5)$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0, \quad (6)$$

$$\nabla \times [\phi(r) \mathbf{r}] = \mathbf{0}, \quad (7)$$

$$(8)$$

9. Um campo forças é dado por $\mathbf{F} = (y \cos x, z^2 + \sin x, 2yz)$. Determine um potencial $V(x, y, z)$ tal que $\mathbf{F} = -\nabla V$.

10. Mostre que a curva definida por $\mathbf{r}(t) = (1/t^3, e^t, 1/t)$ é uma linha de fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (-3z^4, y, -z^2)$.

11. Mostre que a curva definida por $\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t, e^t)$ é uma linha de fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, z)$.

12. Calcule o laplaciano da função

$$\psi(x, y, z) = \frac{zx^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

diretamente e utilizando coordenadas polares.

13. Certas coordenadas são definidas em termos de coordenadas cartesianas por

$$x = \cosh u \cos v \cos \phi, \quad y = \cosh u \cos v \sin \phi, \quad z = \cosh u \cos v.$$

Calcule os vetores tangentes em um ponto geral e mostre que eles são mutuamente ortogonais. Obtenha então os fatores de escala e a expressão para o operador ∇ .

14. Determine a forma do operador ∇ em coordenadas parabólicas (u, v, ϕ) , para as quais o elemento de linha é dado por

$$ds^2 = (u^2 + v^2)(du^2 + dv^2) + u^2 v^2 d\phi^2.$$

15. Coordenadas cilíndricas polares são definidas em termos de coordenadas cartesianas por

$$x = \cosh u \cos v, \quad y = \sinh u \sin v, \quad z = z,$$

onde $0 \leq u \leq \infty$, $0 \leq v \leq 2\pi$ e $-\infty < z < \infty$. Calcule os vetores tangentes em um ponto geral e mostre que eles são mutuamente ortogonais. Obtenha então os fatores de escala e a expressão para o operador ∇ .

16. Seja $\mathbf{F} = (2xy \mathbf{e}^z, x^2 \mathbf{e}^z, x^2 y e^z + z^2)$. Determine uma função $f(x, y, z)$ tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

17. O campo vetorial \mathbf{F} é dito *solenoidal* se \mathbf{F} é diferenciável e $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. \mathbf{F} é chamado *irrotacional* se \mathbf{F} é diferenciável e $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Prove que se \mathbf{F} e \mathbf{G} são irrotacionais, então $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ é solenoidal.

18. Um campo escalar ϕ é dito harmônico se $\nabla^2 \phi = 0$. Mostre que se ϕ é harmônico então $\nabla \phi$ é solenoidal e irrotacional.

19. Se $\phi = \phi(u)$ e $u = u(x, y, z)$, mostre que

$$\nabla \phi(u) = \phi' \nabla u. \quad (9)$$

20. Utilize coordenadas esféricas para provar as seguintes relações:

$$\nabla f(r) = f'(r) \mathbf{e}_r, \quad (10)$$

$$\nabla \cdot [f(r) \mathbf{r}] = 3f(r) + r f'(r), \quad (11)$$

$$\nabla^2 f(r) = \frac{2}{r} f'(r) + f''(r). \quad (12)$$

21. Seja \mathbf{F} definido em coordenadas cilíndricas usuais por

$$\mathbf{F}(\rho, \phi) = f_\rho(\rho, \phi) \mathbf{e}_\rho + f_\phi(\rho, \phi) \mathbf{e}_\phi. \quad (13)$$

Mostre que $\nabla \times \mathbf{F}$ tem somente uma componente z .

22. As coordenadas parabólicas cilíndricas (ξ, η, z) são definidas em termos de coordenadas cartesianas por

$$x = \xi\eta, \quad y = \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2), \quad z = z. \quad (14)$$

(i) Mostre que os fatores de escala são dados por

$$h_\xi = h_\eta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad h_z = 1. \quad (15)$$

(ii) Determine o operador ∇ nestas coordenadas.