

# Probabilidade e Estatística

2011/2

Prof. Fernando Deeke Sasse  
CCT-UDESC

## Distribuição exponencial

1. A distância entre os buracos (significativos) em uma rodovia segue uma distribuição exponencial com uma média de 6 Km.

(a) Qual é a probabilidade de que não haja buracos em um trecho de 10 Km da rodovia ?

(b) Qual é a probabilidade de que haja 3 buracos em 10 Km de rodovia ?

(c) Qual é o desvio padrão da distância entre buracos ?

(d) Qual é a probabilidade de que o primeiro buraco ocorra entre 12 e 15 Km do início da inspeção ?

(e) Qual é a probabilidade de que não haja buracos em dois trechos separados de 5Km, nesta rodovia ?

**Solução.**

(a)

```
> f := (lambda, x) -> lambda*exp(-lambda*x);
```

$$f := (\lambda, x) \rightarrow \lambda e^{-\lambda x}$$

(1.1)

```
> lambda := 1/6;
```

$$\lambda := \frac{1}{6}$$

(1.2)

X: distância até o próximo buraco.

```
> P(10 < X) := evalf(∫10∞ f(λ, x) dx)
```

$$P(10 < X) := 0.1888756028$$

(1.3)

(b) Seja Y o número de buracos em 10Km de rodovia. Como a distância entre os buracos é exponencial, Y é uma variável aleatória de Poisson com  $\lambda = 10(1/6) = 5/3$ .

```
> g := (y, lambda) -> exp(-lambda)*lambda^y/factorial(y);
```

$$g := (y, \lambda) \rightarrow \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!}$$

(1.4)

```
> g(3., 5.*(1/3));
```

$$0.1457373479$$

(1.5)

(c)  $\sigma_X = \frac{1}{\lambda} = 6$

(d)

```
> evalf(∫1215 f(λ, x) dx)
```

(e)

$$0.05325028458$$

(1.6)

```
> P(5 < X) := evalf(∫5∞ f(λ, x) dx)
```

Como os eventos são independentes, a probabilidade desejada é:

$$P(5 < X) := 0.4345982085$$

(1.7)

```
> P(X > 5)^2;
```

$$0.1888756028$$

(1.8)

LL>

2. Um fabricante de peças recebe ordens pela internet através de dois sistemas diferentes de roteamento. O tempo entre as ordens para cada sistema é tipicamente um distribuição exponencial com média de 3.2 minutos. Ambos sistemas operam independentemente.

(a) Qual é a probabilidade de que nenhuma ordem seja recebida em um período de 6 min ? Em 12 min ?

(b) Qual é a probabilidade de que ambos os sistemas recebam duas ordens entre 10 e 15 min. após o site começar a funcionar ?

(c) Por quê a distribuição de probabilidade conjunta não é necessária para responder os itens anteriores ?

**Solução.**

(a)

$$> f := (\lambda, x) \rightarrow \lambda e^{-\lambda x}$$

$$f := (\lambda, x) \rightarrow \lambda e^{-\lambda x} \quad (2.1)$$

$$> \lambda := \frac{1}{3.2}$$

$$\lambda := 0.3125000000 \quad (2.2)$$

$$> P(6 < X, 6 < Y) := \int_6^{\infty} \int_6^{\infty} f(\lambda, x) f(\lambda, y) dx dy$$

$$P(6 < X, 6 < Y) := 0.02351774586 \quad (2.3)$$

$$> P(12 < X, 12 < Y) := \int_{12}^{\infty} \int_{12}^{\infty} f(\lambda, x) f(\lambda, y) dx dy$$

> (b) Seja Y o número de ordens em um intervalo de 5 min. Então Y é uma variável aleatória de Poisson com

$$P(12 < X, 12 < Y) := 0.0005530843701 \quad (2.4)$$

$$> \lambda := np$$

$$\lambda := np \quad (2.5)$$

$$> \lambda := \frac{5}{3.2}$$

$$\lambda := 1.562500000 \quad (2.6)$$

$$> g := (y, \lambda) \rightarrow \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!}$$

$$g := (y, \lambda) \rightarrow \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} \quad (2.7)$$

$$> g(2, \lambda)^2$$

$$0.06547113306 \quad (2.8)$$

>

## Distribuição Normal

3. Uma peça deve ser produzida com um comprimento médio de 100.2 mm e desvio padrão de 0.2 mm.

(a) Qual é a probabilidade de que um comprimento seja maior que 100.4 mm ou menor que 99.6

mm ?

(b) Qual deve ser a média de modo que o maior número de comprimentos fique entre 99.7 mm e 100.4 mm ? Determine este número.

Solução:

```
> restart;
> with(Statistics):
> sigma := 0.2; mu := 100.2;
      sigma := 0.2
      mu := 100.2
```

(3.1)

```
> X := RandomVariable(Normal(mu, sigma));
(a)
> 1 - (CDF(X, 100.4) - CDF(X, 99.6));
      0.1600051519
```

(3.2)

(b) A média deve estar exatamente no meio destes comprimentos.

```
> mu := (99.6 + 100.4) / (2);
      mu := 100.0000000
```

(3.3)

Entre estes valores temos uma proporção de

```
> X := RandomVariable(Normal(mu, sigma));
> (CDF(X, 100.4) - CDF(X, 99.6));
      0.9544997362
```

(3.4)

4. A resistência compressora de amostras de cimento pode ser modelada por uma distribuição normal com uma média de  $6500 \text{ Kg/cm}^2$  e desvio padrão de  $80 \text{ Kg/cm}^2$ .

(a) Qual é a probabilidade de que a resistência de uma amostra seja menor do que  $6450 \text{ Kg/cm}^2$  ?

(b) Qual é a probabilidade de que a resistência de uma amostra esteja entre  $6400$  e  $6600 \text{ Kg/cm}^2$  ?

(c) Qual é a resistência excedida por 95 % ?

Solução.

```
(a)
> restart;
> with(Statistics):
> sigma := 80; mu := 6500;
      sigma := 80
      mu := 6500
```

(4.1)

```
> X := RandomVariable(Normal(mu, sigma));
      X := _R
```

(4.2)

```
> CDF(X, 6450.);
      0.265985529048700430
```

(4.3)

```
(b)
> CDF(X, 6600.) - CDF(X, 6400.);
      0.7887004526
```

(4.4)

```
(c)
> Quantile(X, 0.05);
      6368.411710
```

(4.5)

Ou seja,  $6368.41 \text{ Kg/cm}^2$

## Distribuição de Erlang, Gamma

5. O tempo entre falhas em uma máquina laser é exponencialmente distribuído com uma média de 2500h.

(a) Qual é o tempo esperado até a segunda falha?

(b) Qual é a probabilidade de que o tempo até a terceira falha exceda 50,000h ?

Solução:

Lembramos que uma variável aleatória exponencial descreve o intervalo até que a primeira contagem é obtida em um processo de Poisson. Uma generalização da distribuição exponencial é a distribuição de Erlang, que descreve o intervalo  $X$  até que  $r$  contagens ocorram em um processo de Poisson. Se  $\lambda > 0$  é o valor esperado da variável aleatória de Poisson, então a função densidade de

probabilidade de  $X$ , com parâmetros  $\lambda$  e  $r=1, 2, \dots$  é dada por

```
> restart;
```

```
> f := (x, r, lambda) -> lambda^r * x^(r-1) * exp(-lambda*x) / (r-1)!;
```

$$f := (x, r, \lambda) \rightarrow \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!} \quad (5.1)$$

O valor esperado e a variância são dados por

$$\mu = \frac{r}{\lambda} \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \frac{r}{\lambda^2}.$$

(a)

```
> lambda := 1/25000; r := 2;
```

$$\lambda := \frac{1}{25000}$$

$$r := 2 \quad (5.2)$$

```
> te := r/lambda
```

$$te := 50000 \quad (5.3)$$

(b)

```
> f(x, 3, lambda)
```

$$\frac{1}{31250000000000} x^2 e^{-\frac{1}{25000} x} \quad (5.4)$$

```
> int(f(x, 3, lambda), x = 50000 ..infinity)
```

$$5 e^{-2} \quad (5.5)$$

```
> evalf(%)
```

$$0.6766764160 \quad (5.6)$$

```
> 1 - int(f(x, 3, lambda), x = 0 ..50000)
```

$$5 e^{-2} \quad (5.7)$$