Probabilidade e Estatística, 2009/2

CCT - UDESC

Prof. Fernando Deeke Sasse

Problemas Resolvidos - Testes de Hipóteses

1. Uma empresa de manufatura têxtil está testando rolos de fio que o fornecedor afirma terem 12Kg com um desvio-padrão de 0.5Kg. A empresa deseja testar a hipótese $H_0 : \mu = 12$ contra $H_1 : \mu < 12$, usando uma amostra aleatória de 4 elementos.
(a) Qual é a probabilidade de erro tipo I se a região crítica é definida como $E(X) < 11.5\ Kg$?
(b) Determine β para o caso em que a média verdadeira é de 11.25Kg.

Solução:

(a) Notemos que

$\alpha = P(\textit{erro tipo } I) = P(\textit{rejeita } H_0 \textit{ quando } H_0 \textit{ é verdadeira})$

```
> restart
> with(Statistics):
> σ := 0.5 : μ := 12 : n := 4 :
> X := RandomVariable(Normal(mu, sigma/sqrt(n))):
> CDF(X, 11.5)
```

$$0.02275013194817919 \tag{1.1}$$

(b)

$\beta = P(\textit{erro tipo } II) = P(\textit{não rejeita } H_0 \textit{ quando } H_0 \textit{ é falsa})$

```
> μ := 11.25
```

$$\mu := 11.25 \tag{1.2}$$

```
> X := RandomVariable(Normal(mu, sigma/sqrt(n))):
> 1 - CDF(X, 11.5)
```

$$0.1586552539 \tag{1.3}$$

```
>
```

2. No problema 1 determine as fronteiras da região crítica se a probabilidade de erro do tipo I é especificada como sendo 0.01.

Solução:

```
> restart
> with(Statistics):
> σ := 0.5 : μ := 12 : n := 4 :
> X := RandomVariable(Normal(mu, sigma/sqrt(n))):
> Quantile(X, 0.01)
```

(2.1)

$$11.41841303 \quad (2.1)$$

3. A densidade de calor em cal/g de uma mistura de cimento é aproximadamente normalmente distribuída. Acredita-se que a média é 100 e o desvio-padrão 2. Queremos testar $H_0 : \mu = 100$ contra $H_1 : \mu \neq 100$ com uma amostra de de 9 elementos.

(a) Se a região de aceitação é definida como sendo o intervalo [98.5,101.5], determine a probabilidade de erro I α.

(b) Encontre β no caso em que a média verdadeira é 103.

(c) Encontre β no caso em que a média verdadeira é 105. Este valor é menor do que o valor encontrado na parte (b). Explique a razão.

Solução:

(a)

$\alpha = P(\textit{erro tipo I}) = P(\textit{rejeita } H_0 \textit{ quando } H_0 \textit{ é verdadeira})$

> restart

> with(Statistics):

> $\sigma := 2 : \mu := 100 : n := 9 :$

> $X := RandomVariable\left(Normal\left(\text{mu}, \frac{\text{sigma}}{\text{sqrt}(n)}\right)\right):$

> $2 \cdot (CDF(X, 98.5))$

$$0.02444894532 \quad (3.1)$$

(b)

$\beta = P(\textit{erro tipo II}) = P(\textit{não rejeita } H_0 \textit{ quando } H_0 \textit{ é falsa})$

> $\mu := 103 :$

> $X := RandomVariable\left(Normal\left(\text{mu}, \frac{\text{sigma}}{\text{sqrt}(n)}\right)\right):$

> $CDF(X, 101.5) - CDF(X, 98.5)$

$$0.01222447265 \quad (3.2)$$

(c)

> $\mu := 105 :$

> $X := RandomVariable\left(Normal\left(\text{mu}, \frac{\text{sigma}}{\text{sqrt}(n)}\right)\right):$

> $CDF(X, 101.5) - CDF(X, 98.5)$

$$7.604960516\ 10^{-8} \quad (3.3)$$

A área sob H_1 na região do intervalo crítica é agora desprezível na prática.

4. Uma fábrica de shampoo está interessada na altura da espuma (em mm). A altura é normalmente distribuída e tem desvio padrão de 20mm. A companhia deseja testar $H_0 : \mu = 175\ mm$ contra $H_1 : \mu > 175\ mm$, usando os resultados de 10 amostras.

(a) Determine a probabilidade de erro do tipo I se a região crítica é $(185,\infty)$.

(b) Determine β se a média verdadeira é 195mm.

Solução:

(a)

$\alpha = P\,(erro\ tipo\ I\,) = P\left(rejeita\ H_0\ quando\ H_0\ é\ verdadeira\right)$

```
> restart
> with(Statistics) :
> σ := 20 : μ := 175 : n := 10 :
> X := RandomVariable(Normal(mu, sigma/sqrt(n))) :
> alpha := 1 - CDF(X, 185.)
                                α := 0.0569231490                    (4.1)
```

(b)

$\beta = P\,(erro\ tipo\ II\,) = P\left(não\ rejeita\ H_0\ quando\ H_0\ é\ falsa\right)$

```
> μ := 195 :
> X := RandomVariable(Normal(mu, sigma/sqrt(n))) :
> CDF(X, 185.) - CDF(X, 175.)
                                0.05614044787                        (4.2)
```

5. Considere o problema anterior, supondo que o tamanho da amostra agora é 16.
(a) Onde devem estar as fronteiras da região crítica se α deve permanecer com o mesmo valor quando $n = 10$?
(b) Usando $n = 16$ e a nova região crítica encontrada na parte (a), determine β se a média verdadeira é 195mm.
(c) Compare os valores de β obtidos aqui e no problema anterior. Quais são suas conclusões?

Solução:

(a)

$\alpha = P\,(erro\ tipo\ I\,) = P\left(rejeita\ H_0\ quando\ H_0\ é\ verdadeira\right)$

```
> restart
> with(Statistics) :
> σ := 20 : μ := 175 : n := 16 : α := 0.0569231490 :
> X := RandomVariable(Normal(mu, sigma/sqrt(n))) :
> XC := Quantile(X, 1 - alpha)
                                XC := 182.9056942                    (5.1)
```

(b)

$\beta = P\,(erro\ tipo\ II\,) = P\left(não\ rejeita\ H_0\ quando\ H_0\ é\ falsa\right)$

```
> μ := 195 :
> X := RandomVariable(Normal(mu, sigma/sqrt(n))) :
> CDF(X, XC) - CDF(X, 175.)
                                0.007752919484                       (5.2)
```

(c) O número de amostras aumentou, o desvio-padrão da distribuição diminuiu e, em consequência, para um mesmo α, o valor crítico teve que diminuir. Como o valor crítico se aproximou ainda mais de 175 e a curva normal sob H_1 tornou-se ainda menor, β também diminuiu de valor. Ou seja, aumentando o tamanho da amostra fomos capazes de diminuir β sem aumenta α.

6. Um fabricante está interessado na tensão (V) de saída de uma fonte de energia utilizado por um computador. Supõe-se que a tensão de saída é normalmente distribuída, com desvio-padrão de 0.25V. O fabricante deseja testar $H_0 : \mu = 5V$ contra $H_1 : \mu \neq 5V$, usando 8 amostras.

(a) A região de aceitação é (4.85, 5.15). Determine α .

(b) Determine o poder do teste para detectar o verdadeiro valor médio 5.1V

Solução:

(a)

$\alpha = P\,(\textit{erro tipo I}\,) = P\left(\textit{rejeita } H_0 \textit{ quando } H_0 \textit{ é verdadeira}\right)$

```
> restart
> with(Statistics) :
> σ := 0.25 : μ := 5 : n := 8 :
> X := RandomVariable(Normal(mu, sigma/sqrt(n))) :
> 2· CDF(X, 4.85)
```

$$0.08968602178 \tag{6.1}$$

(b) O poder do teste é dado por $1 - \beta$ e

$\beta = P\,(\textit{erro tipo II}\,) = P\left(\textit{não rejeita } H_0 \textit{ quando } H_0 \textit{ é falsa}\right)$

$1 - \beta = P\left(\textit{ rejeita } H_0 \textit{ quando } H_0 \textit{ é falsa}\right)$

```
> mu := 5.1 :
> X := RandomVariable(Normal(mu, sigma/sqrt(n))) :
> beta := CDF(X, 5.15) - CDF(X, 4.85)
```

$$\beta := 0.7118573100 \tag{6.2}$$

```
> 1 - beta
```

$$0.2881426900 \tag{6.3}$$

7. Um pesquisador deseja estudar o efeito de certa substância no tempo de reação de seres vivos a um certo tipo de estímulo. Um experimento é desenvolvido com cobaias, que são inoculadas com a substância e submetidas a um impulso elétrico, com seu seus tempos de reação (s) dados na seguinte lista:

[9, 1, 9.3, 7.2, 2.5, 13.3, 10.9, 7.2, 9.9, 8.0, 8.6]

Supõe-se que a distribuição do tempo de reação é normal, com média $\mu = 8$ e desvio padrão $\sigma = 2$. O pesquisador desconfia, no entanto, que o tempo médio sofre alteração por influência da substância.

(a) Faça um teste de hipóteses para este problema fixando $\alpha = 0.06$. Ou seja, determine a região crítica e decida se H_0 é consistente com os dados.

(b) Calcule β se a média verdadeira for $\mu = 9$.

Solução:

(a) As hipóteses de interesse são:

H_0 : as cobaias apresentam tempo de reação padrão
H_1 : as cobaias apresentam tempo de reação alterado
Ou seja,
$H_0 : \mu = 8$

$H_1 : \mu \neq 8$

$\alpha = P(\textit{erro tipo I}) = P(\textit{rejeita } H_0 \textit{ quando } H_0 \textit{ é verdadeira})$

```
> restart
> with(Statistics):
> L := [9.1, 9.3, 7.2, 7.5, 13.3, 10.9, 7.2, 9.9, 8.0, 8.6]:
> σ := 2 : μ := 8; n := nops(L);
```

$$\mu := 8$$
$$n := 10 \tag{7.1}$$

$> X := RandomVariable\left(Normal\left(\text{mu}, \frac{\text{sigma}}{\text{sqrt}(n)}\right)\right) :$

Determinemos o intervalo de aceitação:

$> xc1 := Quantile\left(X, 0.06\ \frac{1}{2}\right)$

$$xc1 := 6.810481678 \tag{7.2}$$

$> xc2 := 2\,\mu - xc1$

$$xc2 := 9.189518322 \tag{7.3}$$

ou

$> Quantile\left(X, 1 - 0.06\ \frac{1}{2}\right)$

$$9.189518322 \tag{7.4}$$

Notemos que a média amostral é

$> Mean(L)$

$$9.100000000 \tag{7.5}$$

que está dentro do intervalo de aceitação. A hipótese H_0 é, portanto, aceita, ou seja, a droga não faz efeito, com nível de confiança de 3%.

(b)

$\beta = P(\textit{erro tipo II}) = P(\textit{não rejeita } H_0 \textit{ quando } H_0 \textit{ é falsa})$

$> \text{mu} := 9$

$$\mu := 9 \tag{7.6}$$

$> X := RandomVariable\left(Normal\left(\text{mu}, \frac{\text{sigma}}{\text{sqrt}(n)}\right)\right) :$

$> \beta := CDF(X, xc2) - CDF(X, xc1)$

$$\beta := 0.6175115960 \tag{7.7}$$

Ou seja, se $\mu = 9$, com probabilidade 0.62 concluiríamos (de forma equivocada) que H_0 é verdadeira.

8. Um relatório de uma companhia afirma que 40% de toda a água obtida através de poços artesianos no nordeste é salobra. Há controvérsias sobre tal afirmação. Para tirar tal dúvida são selecionados aleatoriamente 400 poços e observou-se que em 120 a água é salobra. Qual é a conclusão com nível de confiança de 3% ?

Solução:

Inicialmente definimos as hipóteses. O parâmetro de interesse é a proporção p de poços de água salobra. Devemos então realizar um teste bilateral com

$H_0 : p = 0.4$

$H_1 : p \neq 0.4$

O melhor estimado para p é a proporção amostral P_{obs}, cuja distribuição pode ser bem aproximada pela distribuição normal com $\mu = p$ e $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

> $restart$

> $with(Statistics):$

> $p := 0.4; \mu := p; n := 400; \sigma := \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

$$p := 0.4$$

$$\mu := 0.4$$

$$n := 400$$

$$\sigma := 0.02449489743 \tag{8.1}$$

> $X := RandomVariable(Normal(\text{mu, sigma})):$

Determinemos o intervalo de aceitação dado que $\alpha = 0.03$.

```
> pc1 := Quantile(X, 0.03/2);
```

$$pc1 := 0.3468438588 \tag{8.2}$$

```
> pc2 := Quantile(X, 1-0.03/2);
```

$$pc2 := 0.4531561412 \tag{8.3}$$

Portanto, o intervalo de aceitação é [0.347,0.453]. Como a proporção amostral é

> $p_{obs} := \frac{120}{400.}$

$$p_{obs} := 0.3000000000 \tag{8.4}$$

Como este valor está fora do intervalo de aceitação a hipótese nula é rejeitada com um nível de confiança de 3%. Ou seja, a afirmação inicial é incompatível com as observações.

9. Uma amostra aleatória de 500 habitantes de uma cidade são perguntados se eles são favoráveis ao uso de combustíveis oxigenados para reduzir a poluição. Se mais de 315 indivíduos respondem positivamente, poderemos concluir que ao menos 60% dos habitantes são a favor do uso deste tipo de combustível.

(a) Determine a probabilidade do erro tipo I se exatamente 60% dos habitantes são a favor do uso destes combustíveis.

(b) Qual é o erro do tipo II se 65% dos habitantes são a favor do uso destes combustíveis?

Solução:

(a)

Inicialmente definimos as hipóteses. O parâmetro de interesse é a proporção p de de habitantes que opinam favoravelmente. Devemos então realizar um teste bilateral com

$H_0 : p < 0.6$

$H_1 : p > 0.6$

O melhor estimado para p é a proporção amostral P_{obs}, cuja distribuição pode ser bem aproximada pela distribuição normal com $\mu = p$ e $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

```
> restart
> with(Statistics) :
> p := .6;mu := p;n := 500;sigma := sqrt(p*(1-p)/n);
```

$$p := 0.6$$

$$\mu := 0.6$$

$$n := 500$$

$$\sigma := 0.02190890230 \quad (9.1)$$

```
> X := RandomVariable(Normal(mu, sigma)) :
```

$\alpha = P(\textit{erro tipo I}) = P(\textit{rejeita } H_0 \textit{ quando } H_0 \textit{ é verdadeira})$

Valor crítico:

$> pc := \frac{315}{500.}$

$$pc := 0.6300000000 \quad (9.2)$$

de modo que a região crítica é $(0.63,\infty)$. Portanto,

$> \alpha := 1 - CDF(X, pc)$

$$\alpha := 0.0854517601 \quad (9.3)$$

(b)

$\beta = P(\textit{erro tipo II}) = P(\textit{não rejeita } H_0 \textit{ quando } H_0 \textit{ é falsa})$

```
> p := .65; mu := p; sigma := sqrt(p*(1-p)/n);
```

$$p := 0.65$$

$$\mu := 0.65$$

$$\sigma := 0.02133072901 \quad (9.4)$$

$> X := RandomVariable\left(Normal\left(\text{mu}, \frac{\text{sigma}}{\text{sqrt}(n)}\right)\right) :$

$> \beta := CDF(X, pc)$

$$\beta := 6.74654842954110351\ 10^{-98} \quad (9.5)$$

Ou seja, $\beta = 0$. Isso implica que a a probabilidade de aceitar a hipótese nula quando esta é falsa é nula. O poder do teste é $1-\beta=1$.

10. Deseja-se investigar uma certa moléstia que ataca o rim e altera o consumo de oxigênio do órgão. Em indivíduos sadios esse consumo supostamente tem distribuição normal com média $12 m^3$/min. Os valores medidos em 5 pacientes doentes deram os resultados:

[14.4, 12.9, 15.0, 13.7, 13.5]

Faça um teste de hipóteses com 1% de significância.
Solução:
As hipóteses de interesse são:
H_0 : a doença não altera a média de consumo renal de oxigênio
H_1 : a doença altera a média de consumo renal de oxigênio
ou seja,
$H_0 : \mu = 12$
$H_1 : \mu \neq 12$
Devemos fazer um teste bilateral e a região crítica deve ser determinada a partir do nível de significância dado $\alpha = 0.01$. A variância deve ser estimada:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{n-1} .$$

```
> with(Statistics) :
> L := [14.4, 12.9, 15.0, 13.7, 13.5]
```
$$L := [14.4, 12.9, 15.0, 13.7, 13.5] \quad \textbf{(10.1)}$$
```
> n := nops(L)
```
$$n := 5 \quad \textbf{(10.2)}$$
Devemos usar a distribuição t com $n - 1 = 4$ graus de liberdade.
```
> X := RandomVariable(StudentT(n - 1)) :
```
A variável aleatória padronizada é dada por

$$T = \frac{(E(X) - 12)\sqrt{n-1}}{S}$$

$$> tc1 := Quantile\left(X, \left(\frac{0.01}{2}\right)\right)$$
$$tc1 := -4.604096705 \quad \textbf{(10.3)}$$
$$> tc2 := Quantile\left(X, \left(1 - \frac{0.01}{2}\right)\right)$$
$$tc2 := 4.604096705 \quad \textbf{(10.4)}$$
O intervalo de aceitação, na variável padronizada t é então [-4,604, 4,604]. A média observada é
```
> xobs := Mean(L)
```
$$xobs := 13.90000000 \quad \textbf{(10.5)}$$
Como a variância observada é:
$$> V_{obs} := Variance(L)$$
$$V_{obs} := 0.6650000000 \quad \textbf{(10.6)}$$
temos
$$> t_{obs} := \frac{(xobs - 12)}{\mathrm{sqrt}\left(\frac{V_{obs}}{n}\right)}$$
$$t_{obs} := 5.209880722 \quad \textbf{(10.7)}$$
Como este valor está fora do intervalo de aceitação, a hipótese nula é rejeitada. Ou seja, a doença tem

influência no consumo renal médio com um nível de confiança de 1%.

11. A proporção de adultos vivendo em Tempe, Az., que tem nível superior é estimado como sendo $p = 0.4$. Para testar esta hipótese uma amostra aleatória de 15 adultos de Tempe é selecionada. Se o número de indivíduos com nível superior for entre 4 e 8 a hipótese será aceita. Caso contrário concluiremos que $p \neq 0.4$

(a) Determine a probabilidade de erro do tipo I para este procedimento, supondo $p = 0.4$.

(b) Determine a probabilidade de cometer um erro do tipo II se a verdadeira proporção é $p = 0.2$.

Solução:

(a)

Inicialmente definimos as hipóteses. O parâmetro de interesse é a proporção p de de habitantes que opinam favoravelmente. Devemos então realizar um teste bilateral com

$H_0 : p = 0.4$

$H_1 : p \neq 0.4$

O melhor estimado para p é a proporção amostral P_{obs}, cuja distribuição pode ser bem aproximada pela distribuição normal com $\mu = p$ e $\sigma = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

```
> restart
> with(Statistics) :
> p := .4;mu := p;n := 15;sigma := sqrt(p*(1-p)/n);
```

$$p := 0.4$$

$$\mu := 0.4$$

$$n := 15$$

$$\sigma := 0.1264911064 \qquad (11.1)$$

Notemos que as condições necessárias para a validade da aproximação são satisfeitas:

```
> n·p; n·(1 − p)
```

$$6.0$$

$$9.0 \qquad (11.2)$$

```
> X := RandomVariable(Normal(mu, sigma)) :
```

$\alpha = P(\textit{erro tipo I}) = P\left(\textit{rejeita } H_0 \textit{ quando } H_0 \textit{ é verdadeira}\right)$

Pontos críticos:

$$> p1 := \frac{4}{15.}; p2 := \frac{8}{15.}$$

$$p1 := 0.2666666667$$

$$p2 := 0.5333333333 \qquad (11.3)$$

de modo que o intervalo de aceitação é (0.27,0.53). Portanto,

$$> \alpha := 1 - (CDF(X, p2) - CDF(X, p1))$$

$$\alpha := 0.2918405452 \qquad (11.4)$$

(b)

$\beta = P(\textit{erro tipo II}) = P\left(\textit{não rejeita } H_0 \textit{ quando } H_0 \textit{ é falsa}\right)$

```
> p := .2; mu := p; sigma := sqrt(p*(1-p)/n);
```

$$p := 0.2$$

$$\mu := 0.2$$

$$\sigma := 0.1032795559 \tag{11.5}$$

> $X := RandomVariable(Normal(\text{mu}, \text{sigma}))$:

> $\beta := CDF(X, p2) - CDF(X, p1)$

$$\beta := 0.2586780926 \tag{11.6}$$