

Probabilidade e Estatística, 2011/2

CCT - UDESC

Prof. Fernando Deeke Sasse

Testes de Hipóteses

Problemas Resolvidos em Maple

1. A temperatura média da água descartada por uma torre de resfriamento não deve ser maior que 100F. A experiência indica que o desvio padrão da temperatura é 2F. A temperatura da água é medida em 9 dias aleatoriamente escolhidos e a temperatura média encontrada é 98F.

(a) A temperatura da água é aceitável com $\alpha = 0.05$?

(b) Qual é o valor-P para este teste?

(c) Qual é a probabilidade de se aceitar a hipótese nula com $\alpha = 0.05$ se a água tem temperatura média verdadeira de 104F?

Solução:

Estabelecamos a média 100F como um limite não tolerado:

$H_0 : \mu < 100, H_1 : \mu \geq 100$

(a)

```
> restart :
```

```
> with(Statistics) :
```

```
>  $\mu := 100; \sigma := 2; n := 9; \alpha := 0.05;$ 
```

```
 $\mu := 100$ 
```

```
 $\sigma := 2$ 
```

```
 $n := 9$ 
```

```
 $\alpha := 0.05$ 
```

(1.1)

```
>  $X := \text{RandomVariable}\left(\text{Normal}\left(\mu, \frac{\sigma}{\text{sqrt}(n)}\right)\right) :$ 
```

```
>  $xc := \text{Quantile}(X, \alpha)$ 
```

```
 $xc := 98.90343092$ 
```

(1.2)

O intervalo de rejeição é $(98.90, \infty)$. Como a média observada 98F está fora deste intervalo, a hipótese nula é consistente com a observação.

(b)

```
>  $xobs := 98 :$ 
```

```
>  $\text{evalf}(CDF(X, xobs))$ 
```

```
 $0.0013498980$ 
```

(1.3)

(c)

```
>  $X := \text{RandomVariable}\left(\text{Normal}\left(104, \frac{\sigma}{\text{sqrt}(n)}\right)\right) :$ 
```

```
>  $\beta := \text{evalf}(CDF(X, xc))$ 
```

```
 $\beta := 1.045915811 \cdot 10^{-14}$ 
```

(1.4)

Ou seja, $\beta = 0$.

2. Uma fábrica produz virabrequins para motores de carro. O desgaste do virabrequim (em unidades de 0.0001 in) depois de 100,000 milhas é de interesse, pois ele tem impacto nos consertos dentro da garantia. Uma amostra aleatória de 15 peças é testada e o desgaste médio é $x_{obs} = 2.78$. É sabido que $\sigma = 0.9$ e que o desgaste é normalmente distribuído.

(a) Teste a hipótese $H_0: \mu = 3$ contra $H_1: \mu \neq 3$, usando $\alpha = 0.05$.

(b) Qual é o poder do teste se $\mu = 3.25$

(c) Qual deve ser o tamanho da amostra para detectar a verdadeira média de 3.75 se o poder do teste deve ser ao menos 0.9?

Solução:

(a)

```
> restart :
```

```
> with(Statistics) :
```

```
>  $\mu := 3; \sigma := 0.9; n := 15; \alpha := 0.05; x_{obs} := 2.78$ 
```

```
 $\mu := 3$ 
```

```
 $\sigma := 0.9$ 
```

```
 $n := 15$ 
```

```
 $\alpha := 0.05$ 
```

```
 $x_{obs} := 2.78$ 
```

(2.1)

```
>  $X := RandomVariable\left(Normal\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right) :$ 
```

```
>  $x1 := Quantile\left(X, \frac{\alpha}{2}\right)$ 
```

```
 $x1 := 2.544545528$ 
```

(2.2)

```
>  $x2 := Quantile\left(X, 1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ 
```

```
 $x2 := 3.455454472$ 
```

(2.3)

Como o valor observado está dentro do intervalo de aceitação $(x1, x2)$, a hipótese nula é aceita.

(b)

```
>  $X := RandomVariable\left(Normal\left(3.25, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right) :$ 
```

```
>  $\beta := CDF(X, x2) - CDF(X, x1)$ 
```

```
 $\beta := 0.8104888825$ 
```

(2.4)

Portanto, o poder do teste é

```
>  $1 - \beta$ 
```

```
 $0.1895111175$ 
```

(2.5)

(c)

```
>  $\delta := 3.75 - 3; \beta := 0.1$ 
```

```
 $\delta := 0.75$ 
```

```
 $\beta := 0.1$ 
```

(2.6)

```
>  $Z := RandomVariable(Normal(0, 1)) :$ 
```

$$\begin{aligned} > z_{\frac{\alpha}{2}} := \text{Quantile}\left(Z, 1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ z_{0.0250000000} := 1.959963985 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} > z_{\beta} := \text{Quantile}(Z, 1 - \beta) \\ z_{0.1} := 1.281551566 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} > N := \frac{\left(\frac{z_{\alpha}}{2} + z_{\beta}\right)^2 \cdot \sigma^2}{\delta^2} \\ N := 15.13068922 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ou seja, ao menos 16 amostras.

3. A vida em horas de uma lâmpada tem distribuição normal com $\sigma = 25$ h. A partir de uma amostra de 20 lâmpadas é obtida uma vida média de 1054h.

(a) Construa um intervalo de confiança bilateral de 95% sobre a vida média.

(b) Construa um intervalo de confiança limitado inferiormente de 95% sobre a vida média.

(c) Qual o tamanho da amostra a ser usada se quisermos um intervalo de confiança de 95% sobre a média, com largura de 5.5h?

(d) Suponha que queremos estar 95% confiantes de que o erro na estimação da vida média é menos de 4.5h. Qual deve ser o tamanho da amostra?

Solução:

(a)

> restart

> with(Statistics) :

> $\sigma := 25$: $\mu := 1054$: $n := 20$:

> $X := \text{RandomVariable}\left(\text{Normal}\left(\mu, \frac{\sigma}{\text{sqrt}(n)}\right)\right)$:

> $x1 := \text{Quantile}(X, 0.025)$

$$x1 := 1043.043468 \quad (3.1)$$

> $x2 := \text{Quantile}(X, 1 - 0.025)$

$$x2 := 1064.956532 \quad (3.2)$$

Portanto, o intervalo de confiança é [1043.04, 1064.96].

(b)

> $xc := \text{Quantile}(X, 0.05)$

$$xc := 1044.804989 \quad (3.3)$$

O intervalo é [1063.19, $+\infty$).

(c)

> ERRO := 5.5 : $\alpha := 0.05$:

> $Z := \text{RandomVariable}(\text{Normal}(0, 1))$:

> $z_{\frac{\alpha}{2}} := \text{Quantile}(Z, 1 - 0.025)$

$$(3.4)$$

$$z_{0.0250000000} := 1.959963985 \quad (3.4)$$

$$> n := \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{ERRO} \right)^2$$

$$n := 79.36898393 \quad (3.5)$$

Portanto, $n = 8$

(d)

$$> n := \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{4.5} \right)^2$$

$$n := 118.5635439 \quad (3.6)$$

Ou seja, 119 amostras.

4. Um artigo no Journal of Composite Materials, (December 1989, Vol 23, p. 1200) descreve o efeito de delaminação na frequência natural de barras feitas a partir de laminados compostos. 5 barras delaminadas são sujeitas a cargas, e as frequências resultantes são as seguintes (Hz): 230.66, 233.05, 232.58, 229.48, 232.58. Determine um intervalo de confiança de 90% sobre a média. Há evidências que suportem a suposição de normalidade da população?

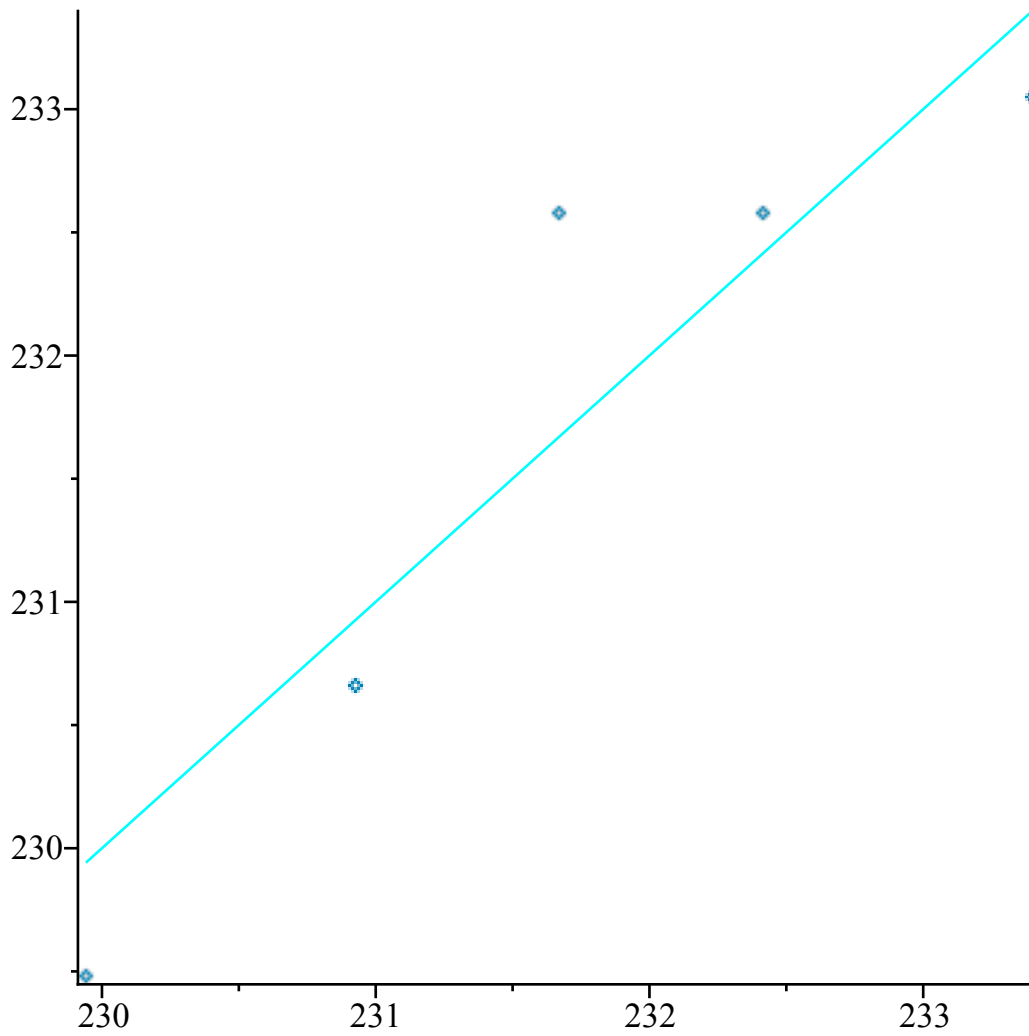
Solução:

> restart :

> with(Statistics) :

> L := [230.66, 233.05, 232.58, 229.48, 232.58] :

> NormalPlot(L)



A distribuição amostral é indica uma distribuição aproximadamente normal da população.

> $n := 5$ $n := 5$ (4.1)

> $\mu := \text{Mean}(L);$ $\mu := 231.6700000$ (4.2)

> $s := \text{StandardDeviation}(L)$ $s := 1.53107805157021$ (4.3)

> $k := n - 1$ $k := 4$ (4.4)

> $T := \text{RandomVariable}(\text{StudentT}(k)) ;$
 > $tc := \text{Quantile}(T, 1 - 0.05)$ $tc := 2.131822837$ (4.5)

> $XC := \text{evalf}\left(\frac{tc \cdot s}{\text{sqrt}(n)}\right)$ $XC := 1.45969943118047$ (4.6)

> $L1 := \mu - XC; L2 := \mu + XC$ $L1 := 230.210300568820$

$$L2 := 233.129699431180$$

(4.7)

Portanto, o intervalo é [230.21, 233.13].

5. Todos os cigarros atualmente vendidos no mercado têm um conteúdo médio de nicotina de ao menos 1.6 mg por cigarro. Uma empresa que produz cigarros afirma ter descoberto um novo processo que resulta em cigarros com menos de 1.6g de nicotina, em média. Para testar esta afirmação 20 amostras deste tipo de cigarro foram analisadas. Se é sabido que o desvio padrão do conteúdo de nicotina de um cigarro é 0.8mg, quais conclusões podem ser obtidas, com um nível de significância de 5%, se o conteúdo médio de nicotina de 20 cigarros é 1.54mg?

Solução:

Necessitamos inicialmente decidir sobre a hipótese nula apropriada. A abordagem para o teste não é simétrica com relação às hipóteses nula e alternativa, pois consideramos somente testes com a propriedade de que a probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira (erro tipo I) nunca excedo o nível de significância α . Portanto, enquanto que a rejeição da hipótese nula é uma afirmação forte sobre os dados não serem consistentes com esta hipótese, uma afirmação análoga não pode ser feita quando a hipótese nula é aceita. Portanto, vamos endossar a afirmação do produtor somente quando houver evidência substancial para isso. Tal afirmação será a hipótese alternativa. Devemos então testar:

$$H_0 : \mu \geq 16 \text{ versus } H_1 : \mu < 16 .$$

```
> with(Statistics) :
```

```
> n := 20 : xobs := 1.54 : mu := 1.6 : alpha := 0.05 : sigma := 0.8 :
```

```
> X := RandomVariable( Normal( mu, sigma / sqrt(n) ) ) :
```

```
> xc := Quantile( X, alpha )
```

$$xc := 1.305759638$$

(5.1)

Ou seja, o intervalo de rejeição é $(1.306, \infty)$. Como 1.54 está dentro deste intervalo, não podemos rejeitar a hipótese nula, ou seja, $\mu \geq 16$ com um nível de significância de 0.05. Ou seja, embora os dados não invalidem o afirmação do fabricante, eles não são suficientemente fortes para corroborá-las. A mesmo conclusão poderia ter sido obtida verificando-se o valor P do teste:

```
> CDF( X, xobs )
```

$$0.368657838608208776$$

(5.2)

Tal valor é consideravelmente maior que 0.05.

6. O fornecedor de água de uma cidade afirma que consumo médio de água em residências é de 350 galões por dia. Para verificar tal afirmação, 20 casas foram aleatoriamente selecionadas e os seguintes valores de consumo foram obtidos:

340, 344, 362, 375, 356, 386, 354, 364, 332, 402, 340, 355, 362, 322, 372, 324, 318, 360, 338, 370.

Estes dados contradizem a afirmação oficial?

Solução:

Devemos testar as hipóteses:

$$H_0 : \mu = 350 \text{ versus } H_1 : \mu \neq 350$$

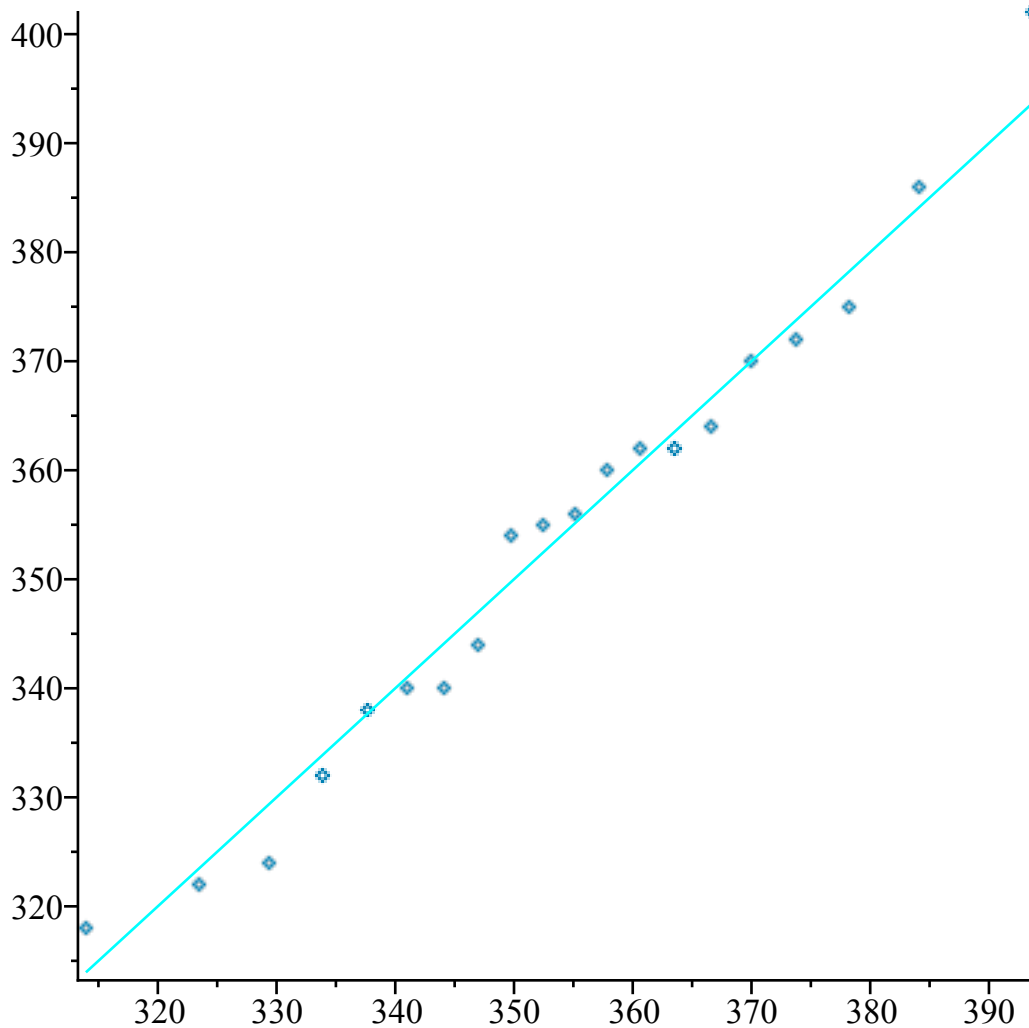
```
> restart :
```

```
> with(Statistics) :
>  $\mu := 350$  :
>  $L := [340, 344, 362, 375, 356, 386, 354, 364, 332, 402, 340, 355, 362, 322, 372, 324, 318,$ 
     $360, 338, 370]$  :
>  $xobs := Mean(L)$ 
     $xobs := 353.8000000$  (6.1)
```

```
>  $s := StandardDeviation(L)$ 
     $s := 21.8477988774493$  (6.2)
```

```
>  $n := nops(L)$ 
     $n := 20$  (6.3)
```

```
> NormalPlot(L)
```



```
>  $k := n - 1$ ;  $\alpha := 0.05$ 
     $k := 19$ 
     $\alpha := 0.05$  (6.4)
```

```
>  $T := RandomVariable(StudentT(k))$  :
```

$$\begin{aligned} > tc := \text{Quantile}\left(T, 1 - \frac{\text{alpha}}{2}\right); \\ & \hspace{15em} tc := 2.093024048 \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned} > XC := \text{evalf}\left(\frac{tc \cdot s}{\text{sqrt}(n)}\right) \\ & \hspace{15em} XC := 10.2250845896192 \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned} > L1 := \mu - XC; L2 := \mu + XC \\ & \hspace{15em} L1 := 339.774915410381 \\ & \hspace{15em} L2 := 360.225084589619 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Como a média observada 353.80 está dentro deste intervalo, a hipótese nula é aceita com um nível de significância de 10%. Portanto, os dados não são inconsistentes com a afirmação oficial.

De fato, como

$$\begin{aligned} > tobs := \text{evalf}\left(\frac{(xobs - \mu) \cdot \text{sqrt}(n)}{s}\right) \\ & \hspace{15em} tobs := 0.777841132670847 \end{aligned} \tag{6.8}$$

o valor-P para este teste é

$$\begin{aligned} > P := 2 \cdot (1 - \text{evalf}(\text{CDF}(T, tobs))) \\ & \hspace{15em} P := 0.446241090 \end{aligned} \tag{6.9}$$

o que indica também que xobs está dentro do intervalo de aceitação.

7. Supercavitação é um fenômeno estudado na tecnologia de propulsão submarina a altas velocidades. Ela ocorre a velocidades acima de aproximadamente 50m/s, quando a pressão cai o suficiente para permitir que a água de vaporize, formando uma bolha de gás atrás do veículo. Quando a bolha de gás envolve completamente o veículo, supercavitação ocorre. 8 testes são realizados com modelos em escala reduzida e uma velocidade média de 102.2m/s é observada. Suponha que a velocidade é normalmente distribuída e $\sigma = 4\text{m/s}$.

(a) Teste a hipótese $H_0 : \mu = 100$ versus $H_0 : \mu \neq 100$, usando $\alpha = 0.05$.

(b) Calcule o poder do teste se a velocidade média verdadeira é tão baixa quanto 95m/s.

(c) Qual o tamanho da amostra requerido para detectar uma média verdadeira tão baixa quanto 95m/s, se queremos que o poder do teste seja de ao menos 0.85?

Solução:

(a)

$H_0 : \mu = 100$ versus $H_1 : \mu \neq 100$.

$$\begin{aligned} > \text{restart} \\ > \text{with(Statistics)} : \\ > n := 8 : xobs := 102.2 : \mu := 100 : \alpha := 0.05 : \sigma := 4 : \\ > X := \text{RandomVariable}\left(\text{Normal}\left(\mu, \frac{\sigma}{\text{sqrt}(n)}\right)\right) : \\ > x1 := \text{Quantile}\left(X, \frac{\text{alpha}}{2}\right) \\ & \hspace{15em} x1 := 97.22819235 \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned} > x2 := \text{Quantile}\left(X, 1 - \frac{\text{alpha}}{2}\right) \\ & \hspace{15em} x2 := 102.7718076 \end{aligned} \tag{7.2}$$

O intervalo de aceitação é, portanto, [97.228,102.771]. Como a média observada está no interior deste intervalo a hipótese nula é aceita.

(b)

```
> X := RandomVariable( Normal( 95,  $\frac{\sigma}{\text{sqrt}(n)}$  ) ) :
```

```
> beta := CDF(X, x2) - CDF(X, x1)
```

```
beta := 0.0575624569 (7.3)
```

O poder do teste é então:

```
> 1 - beta
```

```
0.9424375431 (7.4)
```

(c)

```
> delta := 100 - 95; beta := 0.15
```

```
delta := 5
```

```
beta := 0.15
```

(7.5)

```
> Z := RandomVariable( Normal(0, 1) ) :
```

```
> z_alpha := Quantile( Z, 1 -  $\frac{\alpha}{2}$  )
```

```
z_0.02500000000 := 1.959963985
```

(7.6)

```
> z_beta := Quantile( Z, 1 - beta )
```

```
z_0.15 := 1.036433389
```

(7.7)

```
> N :=  $\frac{\left( z_{\frac{\alpha}{2}} + z_{\beta} \right)^2 \cdot \sigma^2}{\delta^2}$ 
```

```
N := 5.746174224
```

(7.8)

```
>
```

Ou seja, ao menos 6 amostras.

8. Uma empresa de manufatura têxtil está testando rolos de fio que o fornecedor afirma terem 12Kg com um desvio-padrão de 0.5Kg. A empresa deseja testar a hipótese $H_0: \mu = 12$ contra $H_1: \mu < 12$, usando uma amostra aleatória de 4 elementos.

(a) Qual é a probabilidade de erro tipo I se a região crítica é definida como $E(X) < 11.5$ Kg ?

(b) Determine β para o caso em que a média verdadeira é de 11.25Kg.

Solução:

(a) Notemos que

$\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeita } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ é verdadeira})$

```
> restart
```

```
> with(Statistics) :
```

```
> sigma := 0.5 : mu := 12 : n := 4 :
```

```

> X := RandomVariable( Normal( mu,  $\frac{\text{sigma}}{\text{sqrt}(n)}$  ) ) :
> CDF(X, 11.5)
0.0227501319481791948

```

(8.1)

(b)

$\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{n\~{a}o rejeita } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ \textit{\'e} falsa})$

```

> μ := 11.25
μ := 11.25

```

(8.2)

```

> X := RandomVariable( Normal( mu,  $\frac{\text{sigma}}{\text{sqrt}(n)}$  ) ) :
> 1 - CDF(X, 11.5)
0.1586552539

```

(8.3)

9. No problema 1 determine as fronteiras da regi\~{a}o cr\~{i}tica se a probabilidade de erro do tipo I \textit{\'e} especificada como sendo 0.01.

Solu\~{c}\~{a}o:

```

> restart
> with(Statistics) :
> σ := 0.5 : μ := 12 : n := 4 :
> X := RandomVariable( Normal( mu,  $\frac{\text{sigma}}{\text{sqrt}(n)}$  ) ) :
> Quantile(X, 0.01)
11.41841303

```

(9.1)

10. A densidade de calor em cal/g de uma mistura de cimento \textit{\'e} aproximadamente normalmente distribuída. Acredita-se que a m\~{e}dia \textit{\'e} 100 e o desvio-padr\~{a}o 2. Queremos testar $H_0 : \mu = 100$ contra $H_1 : \mu \neq 100$ com uma amostra de de 9 elementos.

(a) Se a regi\~{a}o de aceita\~{c}\~{a}o \textit{\'e} definida como sendo o intervalo [98.5,101.5], determine a probabilidade de erro I α .

(b) Encontre β no caso em que a m\~{e}dia verdadeira \textit{\'e} 103.

(c) Encontre β no caso em que a m\~{e}dia verdadeira \textit{\'e} 105. Este valor \textit{\'e} menor do que o valor encontrado na parte (b). Explique a raz\~{a}o.

Solu\~{c}\~{a}o:

(a)

$\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeita } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ \textit{\'e} verdadeira})$

```

> restart
> with(Statistics) :
> σ := 2 : μ := 100 : n := 9 :
>

```

```

> X := RandomVariable( Normal( mu, sigma / sqrt(n) ) ) :
> 2 * ( CDF(X, 98.5) )
0.02444894532 (10.1)

```

(b)

$\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{n\~{a}o rejeita } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ \textit{\'e} falsa})$

```

> mu := 103 :
> X := RandomVariable( Normal( mu, sigma / sqrt(n) ) ) :
> CDF(X, 101.5) - CDF(X, 98.5)
0.01222447265 (10.2)

```

(c)

```

> mu := 105 :
> X := RandomVariable( Normal( mu, sigma / sqrt(n) ) ) :
> CDF(X, 101.5) - CDF(X, 98.5)
7.604960516 10^-8 (10.3)

```

A \u00e1rea sob H_1 na regi\u00e3o do intervalo cr\u00edtica \u00e9 agora desprez\u00edvel na pr\u00e1tica.

11. Uma f\u00e1brica de shampoo est\u00e1 interessada na altura da espuma (em mm). A altura \u00e9 normalmente distribu\u00edda e tem desvio padr\u00e3o de 20mm. A companhia deseja testar $H_0 : \mu = 175 \text{ mm}$ contra $H_1 : \mu > 175 \text{ mm}$, usando os resultados de 10 amostras.

(a) Determine a probabilidade de erro do tipo I se a regi\u00e3o cr\u00edtica \u00e9 $(185, \infty)$.

(b) Determine β se a m\u00e9dia verdadeira \u00e9 195mm.

Solu\u00e7\u00e3o:

(a)

$\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeita } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ \textit{\'e} verdadeira})$

```

> restart
> with(Statistics) :
> sigma := 20 : mu := 175 : n := 10 :
> X := RandomVariable( Normal( mu, sigma / sqrt(n) ) ) :
> alpha := 1 - CDF(X, 185.)
alpha := 0.0569231490 (11.1)

```

(b)

$\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{n\~{a}o rejeita } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ \textit{\'e} falsa})$

```

> mu := 195 :
> X := RandomVariable( Normal( mu, sigma / sqrt(n) ) ) :
> CDF(X, 185.) - CDF(X, 175.)
0.05614044787 (11.2)

```

```
> CDF(X, 185.);
```

```
0.0569231490033289962
```

(11.3)

12. Considere o problema anterior, supondo que o tamanho da amostra agora é 16.

(a) Onde devem estar as fronteiras da região crítica se α deve permanecer com o mesmo valor quando $n = 10$?

(b) Usando $n = 16$ e a nova região crítica encontrada na parte (a), determine β se a média verdadeira é 195mm.

(c) Compare os valores de β obtidos aqui e no problema anterior. Quais são suas conclusões?

Solução:

(a)

$\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeita } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ é verdadeira})$

```
> restart
```

```
> with(Statistics) :
```

```
> sigma := 20 : mu := 175 : n := 16 : alpha := 0.0569231490 :
```

```
> X := RandomVariable( Normal( mu, sigma / sqrt(n) ) ) :
```

```
> XC := Quantile(X, 1 - alpha)
```

```
XC := 182.9056942
```

(12.1)

(b)

$\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{não rejeita } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ é falsa})$

```
> mu := 195 :
```

```
> X := RandomVariable( Normal( mu, sigma / sqrt(n) ) ) :
```

```
> CDF(X, XC) - CDF(X, 175.)
```

```
0.007752919484
```

(12.2)

(c) O número de amostras aumentou, o desvio-padrão da distribuição diminuiu e, em consequência, para um mesmo α , o valor crítico teve que diminuir. Como o valor crítico se aproximou ainda mais de 175 e a curva normal sob H_1 tornou-se ainda menor, β também diminuiu de valor. Ou seja,

aumentando o tamanho da amostra fomos capazes de diminuir β sem aumenta α .

13. Um fabricante está interessado na tensão (V) de saída de uma fonte de energia utilizado por um computador. Supõe-se que a tensão de saída é normalmente distribuída, com desvio-padrão de 0.25V.

O fabricante deseja testar $H_0 : \mu = 5V$ contra $H_1 : \mu \neq 5V$, usando 8 amostras.

(a) A região de aceitação é (4.85, 5.15). Determine α .

(b) Determine o poder do teste para detectar o verdadeiro valor médio 5.1V

Solução:

(a)

$\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeita } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ é verdadeira})$

```
> restart
```

```
> with(Statistics) :
```

```
> sigma := 0.25 : mu := 5 : n := 8 :
```

```
> X := RandomVariable( Normal( mu, sigma / sqrt(n) ) ) :
```

```
> 2 * CDF(X, 4.85)
0.08968602178 (13.1)
```

(b) O poder do teste é dado por $1 - \beta$ e

$\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{n\~{a}o rejeita } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ \textit{\'e} falsa})$

$1 - \beta = P(\text{rejeita } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ \textit{\'e} falsa})$

```
> mu := 5.1 :
```

```
> X := RandomVariable( Normal( mu, sigma / sqrt(n) ) ) :
```

```
> beta := CDF(X, 5.15) - CDF(X, 4.85)
```

```
beta := 0.7118573100 (13.2)
```

```
> 1 - beta
```

```
0.2881426900 (13.3)
```

14. Um pesquisador deseja estudar o efeito de certa subst\~{a}ncia no tempo de rea\~{c}o\~{e} de seres vivos a um certo tipo de est\~{i}mulo. Um experimento \textit{\'e} desenvolvido com cobaias, que s\~{a}o inoculadas com a subst\~{a}ncia e submetidas a um impulso el\~{e}trico, com seus tempos de rea\~{c}o\~{e} (s) dados na seguinte lista:

[9, 1, 9.3, 7.2, 2.5, 13.3, 10.9, 7.2, 9.9, 8.0, 8.6]

Sup\~{o}e-se que a distribui\~{c}o\~{e} do tempo de rea\~{c}o\~{e} \textit{\'e} normal, com m\~{e}dia $\mu = 8$ e desvio padr\~{a}o $\sigma = 2$. O pesquisador desconfia, no entanto, que o tempo m\~{e}dio sofre altera\~{c}o\~{e} por influ\~{e}ncia da subst\~{a}ncia.

(a) Fa\~{c}a um teste de hip\~{o}teses para este problema fixando $\alpha = 0.06$. Ou seja, determine a regi\~{a}o cr\~{i}tica e decida se H_0 \textit{\'e} consistente com os dados.

(b) Calcule β se a m\~{e}dia verdadeira for $\mu = 9$.

Solu\~{c}o\~{e}:

(a) As hip\~{o}teses de interesse s\~{a}o:

H_0 : as cobaias apresentam tempo de rea\~{c}o\~{e} padr\~{a}o

H_1 : as cobaias apresentam tempo de rea\~{c}o\~{e} alterado

Ou seja,

H_0 : $\mu = 8$

H_1 : $\mu \neq 8$

$\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeita } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ \textit{\'e} verdadeira})$

```
> restart
```

```
> with(Statistics) :
```

```
> L := [9.1, 9.3, 7.2, 7.5, 13.3, 10.9, 7.2, 9.9, 8.0, 8.6] :
```

```
> sigma := 2 : mu := 8 ; n := nops(L) ;
```

```
mu := 8
```

```
n := 10
```

(14.1)

```
> X := RandomVariable( Normal( mu, sigma / sqrt(n) ) ) :
```

Determinemos o intervalo de aceita\~{c}o\~{e}:

$$\begin{aligned} > xc1 := \text{Quantile}\left(X, 0.06 \frac{1}{2}\right) \\ & \hspace{15em} xc1 := 6.810481678 \end{aligned} \tag{14.2}$$

$$\begin{aligned} > xc2 := 2 \mu - xc1 \\ & \hspace{15em} xc2 := 9.189518322 \end{aligned} \tag{14.3}$$

ou

$$\begin{aligned} > \text{Quantile}\left(X, 1 - 0.06 \frac{1}{2}\right) \\ & \hspace{15em} 9.189518322 \end{aligned} \tag{14.4}$$

Notemos que a média amostral é

$$\begin{aligned} > \text{Mean}(L) \\ & \hspace{15em} 9.100000000 \end{aligned} \tag{14.5}$$

que está dentro do intervalo de aceitação. A hipótese H_0 é, portanto, aceita, ou seja, a droga não faz efeito, com nível de confiança de 3%.

(b)

$\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{não rejeita } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ é falsa})$

$$\begin{aligned} > \mu := 9 \\ & \hspace{15em} \mu := 9 \end{aligned} \tag{14.6}$$

$$> X := \text{RandomVariable}\left(\text{Normal}\left(\mu, \frac{\text{sigma}}{\text{sqrt}(n)}\right)\right) :$$

$$\begin{aligned} > \beta := \text{CDF}(X, xc2) - \text{CDF}(X, xc1) \\ & \hspace{15em} \beta := 0.6175115960 \end{aligned} \tag{14.7}$$

Ou seja, se $\mu = 9$, com probabilidade 0.62 concluiríamos (de forma equivocada) que H_0 é verdadeira.

15. Um relatório de uma companhia afirma que 40% de toda a água obtida através de poços artesianos no nordeste é salobra. Há controvérsias sobre tal afirmação. Para tirar tal dúvida são selecionados aleatoriamente 400 poços e observou-se que em 120 a água é salobra. Qual é a conclusão com nível de confiança de 3% ?

Solução:

Inicialmente definimos as hipóteses. O parâmetro de interesse é a proporção p de poços de água salobra. Devemos então realizar um teste bilateral com

$$H_0 : p = 0.4$$

$$H_1 : p \neq 0.4$$

O melhor estimado para p é a proporção amostral P_{obs} , cuja distribuição pode ser bem aproximada

pela distribuição normal com $\mu = p$ e $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

$$> \text{restart}$$

$$> \text{with(Statistics)} :$$

$$\begin{aligned} > p := 0.4; \mu := p; n := 400; \sigma := \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\ & \hspace{15em} p := 0.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu &:= 0.4 \\ n &:= 400 \\ \sigma &:= 0.02449489743\end{aligned}\tag{15.1}$$

> $X := \text{RandomVariable}(\text{Normal}(\mu, \sigma)) :$

Determinemos o intervalo de aceitação dado que $\alpha = 0.03$.

$$\begin{aligned}> \text{pc1} &:= \text{Quantile}(X, 0.03/2); \\ \text{pc1} &:= 0.3468438588\end{aligned}\tag{15.2}$$

$$\begin{aligned}> \text{pc2} &:= \text{Quantile}(X, 1-0.03/2); \\ \text{pc2} &:= 0.4531561412\end{aligned}\tag{15.3}$$

Portanto, o intervalo de aceitação é $[0.347, 0.453]$. Como a proporção amostral é

$$\begin{aligned}> P_{obs} &:= \frac{120}{400}. \\ P_{obs} &:= 0.3000000000\end{aligned}\tag{15.4}$$

Como este valor está fora do intervalo de aceitação a hipótese nula é rejeitada com um nível de confiança de 3%. Ou seja, a afirmação inicial é incompatível com as observações.

16. Uma amostra aleatória de 500 habitantes de uma cidade são perguntados se eles são favoráveis ao uso de combustíveis oxigenados para reduzir a poluição. Se mais de 315 indivíduos respondem positivamente, poderemos concluir que ao menos 60% dos habitantes são a favor do uso deste tipo de combustível.

(a) Determine a probabilidade do erro tipo I se exatamente 60% dos habitantes são a favor do uso destes combustíveis.

(b) Qual é o erro do tipo II se 65% dos habitantes são a favor do uso destes combustíveis?

Solução:

(a)

Inicialmente definimos as hipóteses. O parâmetro de interesse é a proporção p de habitantes que opinam favoravelmente. Devemos então realizar um teste bilateral com

$$H_0 : p < 0.6$$

$$H_1 : p > 0.6$$

O melhor estimado para p é a proporção amostral P_{obs} , cuja distribuição pode ser bem aproximada

pela distribuição normal com $\mu = p$ e $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

> restart

> with(Statistics) :

$$\begin{aligned}> p &:= .6; \mu := p; n := 500; \sigma := \text{sqrt}(p*(1-p)/n); \\ p &:= 0.6 \\ \mu &:= 0.6 \\ n &:= 500 \\ \sigma &:= 0.02190890230\end{aligned}\tag{16.1}$$

> $X := \text{RandomVariable}(\text{Normal}(\mu, \sigma)) :$

$\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeita } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ é verdadeira})$

Valor crítico:

$$\begin{aligned} > pc := \frac{315}{500} \\ & \hspace{15em} pc := 0.6300000000 \end{aligned} \quad (16.2)$$

de modo que a região crítica é $(0.63, \infty)$. Portanto,

$$\begin{aligned} > \alpha := 1 - CDF(X, pc) \\ & \hspace{15em} \alpha := 0.0854517601 \end{aligned} \quad (16.3)$$

(b)

$\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{não rejeita } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ é falsa})$

$$\begin{aligned} > p := .65; \mu := p; \sigma := \sqrt{p * (1 - p) / n}; \\ & \hspace{15em} p := 0.65 \\ & \hspace{15em} \mu := 0.65 \\ & \hspace{15em} \sigma := 0.02133072901 \end{aligned} \quad (16.4)$$

$$\begin{aligned} > X := RandomVariable\left(Normal\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right); \\ > \beta := CDF(X, pc) \\ & \hspace{15em} \beta := 6.74654842954110352 \cdot 10^{-98} \end{aligned} \quad (16.5)$$

Ou seja, $\beta = 0$. Isso implica que a a probabilidade de aceitar a hipótese nula quando esta é falsa é nula. O poder do teste é $1 - \beta = 1$.

17. Deseja-se investigar uma certa moléstia que ataca o rim e altera o consumo de oxigênio do órgão. Em indivíduos sadios esse consumo supostamente tem distribuição normal com média $12 \text{ cm}^3/\text{min}$. Os valores medidos em 5 pacientes doentes deram os resultados:

[14.4, 12.9, 15.0, 13.7, 13.5]

Faça um teste de hipóteses com 1% de significância.

Solução:

As hipóteses de interesse são:

H_0 : a doença não altera a média de consumo renal de oxigênio

H_1 : a doença altera a média de consumo renal de oxigênio

ou seja,

$H_0 : \mu = 12$

$H_1 : \mu \neq 12$

Devemos fazer um teste bilateral e a região crítica deve ser determinada a partir do nível de significância dado $\alpha = 0.01$. A variância deve ser estimada:

$$S^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{n - 1}.$$

$$\begin{aligned} > with(Statistics) : \\ > L := [14.4, 12.9, 15.0, 13.7, 13.5] \\ & \hspace{15em} L := [14.4, 12.9, 15.0, 13.7, 13.5] \end{aligned} \quad (17.1)$$

$$\begin{aligned} > n := nops(L) \\ & \hspace{15em} n := 5 \end{aligned} \quad (17.2)$$

Devemos usar a distribuição t com $n - 1 = 4$ graus de liberdade.

$X := RandomVariable(StudentT(n - 1)) :$

A variável aleatória padronizada é dada por

$$T = \frac{(E(X) - 12) \sqrt{n - 1}}{S}$$

```
> tc1 := Quantile(X, (0.01 / 2))
tc1 := -4.604096705 (17.3)
```

```
> tc2 := Quantile(X, (1 - 0.01 / 2))
tc2 := 4.604096705 (17.4)
```

O intervalo de aceitação, na variável padronizada t é então $[-4,604, 4,604]$. A média observada é

```
> xobs := Mean(L)
xobs := 13.90000000 (17.5)
```

Como a variância observada é:

```
> Vobs := Variance(L)
Vobs := 0.6650000000000000 (17.6)
```

temos

```
> t_obs := (xobs - 12) / sqrt(Vobs / n)
t_obs := 5.20988072251728 (17.7)
```

Como este valor está fora do intervalo de aceitação, a hipótese nula é rejeitada. Ou seja, a doença tem influência no consumo renal médio com um nível de confiança de 1%.

18. A proporção de adultos vivendo em Tempe, Az., que tem nível superior é estimado como sendo $p = 0.4$. Para testar esta hipótese uma amostra aleatória de 15 adultos de Tempe é selecionada. Se o número de indivíduos com nível superior for entre 4 e 8 a hipótese será aceita. Caso contrário concluiremos que $p \neq 0.4$

(a) Determine a probabilidade de erro do tipo I para este procedimento, supondo $p = 0.4$.

(b) Determine a probabilidade de cometer um erro do tipo II se a verdadeira proporção é $p = 0.2$.

Solução:

(a)

Inicialmente definimos as hipóteses. O parâmetro de interesse é a proporção p de habitantes que opinam favoravelmente. Devemos então realizar um teste bilateral com

$$H_0 : p = 0.4$$

$$H_1 : p \neq 0.4$$

O melhor estimado para p é a proporção amostral P_{obs} , cuja distribuição pode ser bem aproximada

pela distribuição normal com $\mu = p$ e $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

```
> restart
> with(Statistics) :
> p := .4; mu := p; n := 15; sigma := sqrt(p*(1-p)/n);
p := 0.4
mu := 0.4
```

$$\begin{aligned} n &:= 15 \\ \sigma &:= 0.1264911064 \end{aligned} \quad (18.1)$$

Notemos que as condições necessárias para a validade da aproximação são satisfeitas:

$$\begin{aligned} > n \cdot p; n \cdot (1 - p) \\ & \quad \quad \quad 6.0 \\ & \quad \quad \quad 9.0 \end{aligned} \quad (18.2)$$

$X := \text{RandomVariable}(\text{Normal}(\mu, \sigma)) :$

$\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeita } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ é verdadeira})$

Pontos críticos:

$$\begin{aligned} > p1 := \frac{4}{15}; p2 := \frac{8}{15} \\ & \quad \quad \quad p1 := 0.2666666667 \\ & \quad \quad \quad p2 := 0.5333333333 \end{aligned} \quad (18.3)$$

de modo que o intervalo de aceitação é (0.27,0.53). Portanto,

$$\begin{aligned} > \alpha := 1 - (CDF(X, p2) - CDF(X, p1)) \\ & \quad \quad \quad \alpha := 0.2918405452 \end{aligned} \quad (18.4)$$

(b)

$\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{não rejeita } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ é falsa})$

$$\begin{aligned} > p := .2; \mu := p; \sigma := \text{sqrt}(p \cdot (1-p)/n); \\ & \quad \quad \quad p := 0.2 \\ & \quad \quad \quad \mu := 0.2 \\ & \quad \quad \quad \sigma := 0.1032795559 \end{aligned} \quad (18.5)$$

$X := \text{RandomVariable}(\text{Normal}(\mu, \sigma)) :$

$$\begin{aligned} > \beta := CDF(X, p2) - CDF(X, p1) \\ & \quad \quad \quad \beta := 0.2586780926 \end{aligned} \quad (18.6)$$

19. O rendimento de um processo químico está sendo estudado. A partir de experiência prévia sabe-se que tal rendimento é normalmente distribuído e $\sigma = 3$. Os últimos 5 dias de operação da planta resultaram nos seguintes rendimentos percentuais: [91.6, 88.75, 90.8, 89.95, 91.13].

(a) Determine um intervalo de confiança bilateral com nível 95% sobre o valor verdadeiro do rendimento.

(b) Há evidência de que a média não é 90% ?

(c) Qual é o valor-P para este teste?

(d) Qual é o tamanho da amostra necessário para detectar uma média verdadeira de 85% com uma probabilidade de 0.95?

Solução:

$> \text{restart} :$

$> \text{with}(\text{Statistics}) :$

```

> n := 5 :
> sigma := 3 :
> L := [91.6, 88.75, 90.8, 89.95, 91.3] :
>  $\mu_{ob} := \text{Mean}(L)$ 

```

$\mu_{ob} := 90.48000000$ **(19.1)**

(a)

```

>  $X := \text{RandomVariable}\left(\text{Normal}\left(\mu_{ob}, \frac{\text{sigma}}{\text{sqrt}(5)}\right)\right) :$ 
>  $x1 := \text{Quantile}(X, 0.025)$ 

```

$x1 := 87.85043238$ **(19.2)**

```

>  $x2 := \text{Quantile}(X, 1 - 0.025)$ 

```

$x2 := 93.10956762$ **(19.3)**

(b) O parâmetro de interesse é a média verdadeira $\mu = 90$:

$H_0 : \mu = 90$

$H_1 : \mu \neq 90$

```

> alpha := 0.05; mu := 90

```

$\alpha := 0.05$
 $\mu := 90$ **(19.4)**

```

>  $X := \text{RandomVariable}\left(\text{Normal}\left(\mu, \frac{\text{sigma}}{\text{sqrt}(5)}\right)\right) :$ 
>  $x1 := \text{Quantile}\left(X, \frac{\text{alpha}}{2}\right)$ 

```

$x1 := 87.37043238$ **(19.5)**

```

>  $x2 := \text{Quantile}\left(X, 1 - \frac{\text{alpha}}{2}\right)$ 

```

$x2 := 92.62956762$ **(19.6)**

Como $\mu_{obs} := 90.48000000$ pertence ao intervalo (87.37,92.63), a hipótese nula $\mu = 90$ é aceita.

(b) Lembramos que o valor-P é o menor nível de significância que poderia conduzir à rejeição da hipótese nula, com base nos resultados amostrais. Como o teste é bilateral, temos

```

>  $P := 2 \cdot (1 - \text{CDF}(X, \mu_{ob}))$ 

```

$P := 0.720514787$ **(19.7)**

(c) Aqui

```

> delta := 85 - 90;  $\beta := 0.05$ 

```

$\delta := -5$
 $\beta := 0.05$ **(19.8)**

```

>  $X := \text{RandomVariable}(\text{Normal}(0, 1)) :$ 
>  $z_{\frac{\text{alpha}}{2}} := \text{Quantile}\left(X, 1 - \frac{\text{alpha}}{2}\right)$ 

```

$z_{0.0250000000} := 1.959963985$ **(19.9)**

```

>  $z_{\text{beta}} := \text{Quantile}(X, 1 - \text{beta})$ 

```

(19.10)

$$z_{0.05} := 1.644853627 \quad (19.10)$$

$$n := \frac{\left(\frac{z_{\alpha}}{2} + z_{\beta}\right)^2}{\delta^2} \cdot \sigma^2$$

$$n := 4.678095607 \quad (19.11)$$

Ou seja, $n = 5$.

20. Um teste de ponto de fusão de 10 amostras de um composto químico resultou numa média de 154F. Suponha que o ponto de fusão é normalmente distribuído com $\sigma = 1.5F$.

- Teste a hipótese $H_0 : \mu = 155$ versus $H_0 \neq 155$ usando $\alpha = 0.01$.
- Qual é o valor-P para este teste?
- Qual é o erro β se a média verdadeira é $\mu = 150$?
- Qual é o número n de amostras se exigimos que $\beta < 0.1$, quando $\mu = 150$, com $\alpha = 0.01$?

Solução:

> restart :

> with(Statistics) :

> n := 10 :

> sigma := 1.5 :

> mu[ob] := 154.2 :

> alpha := 0.01 :

(a)

> X := RandomVariable(Normal(155, $\frac{1.5}{\text{sqrt}(n)}$)) :

> x1 := Quantile(X, $\frac{\alpha}{2}$)

$$x1 := 153.7781769 \quad (20.1)$$

> x2 := Quantile(X, $1 - \frac{\alpha}{2}$)

$$x2 := 156.2218231 \quad (20.2)$$

Como μ_{ob} está dentro deste intervalo a hipótese nula é aceita.

(b)

> 2 · CDF(X, mu[ob])

$$0.09169028154 \quad (20.3)$$

(c)

> X := RandomVariable(Normal(150, $\frac{1.5}{\text{sqrt}(n)}$)) :

> beta := CDF(X, x2) - CDF(X, x1)

$$\beta := 0. \quad (20.4)$$

>

(d)

Aqui

```
> delta := 150 - 155; alpha := 0.01; beta := 0.1
      delta := -5
      alpha := 0.01
      beta := 0.1
```

(20.5)

```
> X := RandomVariable(Normal(0, 1)) :
```

```
> z_alpha := Quantile(X, 1 - alpha/2)
      z_0.005000000000 := 2.575829304
```

(20.6)

```
> z_beta := Quantile(X, 1 - beta)
```

```
      z_0.1 := 1.281551566
```

(20.7)

```
> n := ((z_alpha/2 + z_beta)^2) / delta^2 * sigma^2
```

```
      n := 1.339144846
```

(20.8)

Ou seja, $n = 2$.

21. Um engenheiro que está estudando a resistência à tensão de uma liga de aço sabe que esta resistência é normalmente distribuída com $\sigma = 60$. Uma amostra aleatória de 12 elementos tem uma média $x_{obs} = 3250$.

- Teste a hipótese de que a resistência média é 3500 psi. Use $\alpha = 0.01$.
- Qual é o menor nível de significância possível para rejeitar a hipótese nula?
- Encontre um intervalo de confiança de 95% bilateral sobre a média observada.

Solução:

(a) O parâmetro de interesse é a verdadeira resistência média:

$H_0: \mu = 3500$

$H_1: \mu \neq 3500$

```
> restart
```

```
> with(Statistics) :
```

```
> mu := 3500; sigma := 60; n := 12; alpha := 0.01
```

```
      mu := 3500
```

```
      sigma := 60
```

```
      n := 12
```

```
      alpha := 0.01
```

(21.1)

```
> X := RandomVariable(Normal(mu, sigma/sqrt(n))) :
```

```
> x1 := Quantile(X, alpha/2)
```

```
      x1 := 3455.385328
```

(21.2)

$$\begin{aligned} > x2 := \text{Quantile}\left(X, 1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ & \qquad \qquad \qquad x2 := 3544.614672 \end{aligned} \qquad (21.3)$$

(b) Como a média observada $x_{obs} = 3250$ está fora deste intervalo a hipótese nula deve ser rejeitada.

$$\begin{aligned} > P := 2 \cdot (\text{CDF}(X, 3250.)) \\ & \qquad \qquad \qquad P := 3.173160048 \cdot 10^{-47} \end{aligned} \qquad (21.4)$$

Ou seja, $P = 0$.

$$\begin{aligned} & (c) \\ > \alpha := 0.05 : x_{obs} := 3250 : \\ > X := \text{RandomVariable}\left(\text{Normal}\left(x_{obs}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right) : \\ > x1 := \text{Quantile}\left(X, \frac{\alpha}{2}\right) \\ & \qquad \qquad \qquad x1 := 3216.052428 \end{aligned} \qquad (21.5)$$

$$\begin{aligned} > x2 := \text{Quantile}\left(X, 1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ & \qquad \qquad \qquad x2 := 3283.947572 \end{aligned} \qquad (21.6)$$

Portanto, com 95% de confiança acreditamos que a verdadeira média está no intervalo [3216.05, 3283.95]. Podemos testar a hipótese de que a verdadeira não é igual a 3500 notando que este valor não está no intervalo de confiança.