

Métodos Numéricos para Equações Diferenciais

Fernando Deeke Sasse

Departamento de Matemática, UDESC - Joinville

2008/2

Maple Básico

1. Maple como programa de computação algébrica

O Maple é um ambiente matemático, resolvidor de problemas completo, que suporta uma grande variedade de operações matemáticas tais como análise numérica, álgebra simbólica e gráficos.

Ele compreende quatro aspectos gerais que são:

- computação algébrica
- computação numérica
- computação gráfica
- programação

Todas estes aspectos estão integrados formando um corpo único. Por exemplo, a partir de um resultado algébrico, uma análise numérica ou gráfica pode imediatamente ser feita. Em geral, na análise de um problema, várias ferramentas são necessárias. Se estas ferramentas não estiverem no mesmo software, o usuário enfrentará uma série de dificuldades para compatibilizar a saída de um software com a entrada de outro, além de ter que familiarizar-se com diferentes notações e estilos. É claro que o Maple não elimina completamente o uso de linguagens numéricas ou gráficas. Em aplicações mais elaboradas pode ser necessário usar recursos de linguagens como C ou Fortran. O Maple tem interface com estas linguagens no sentido de que um resultado algébrico encontrado no Maple pode ser convertido para a notação da linguagem C ou para a linguagem Fortran.

Os aspectos novos trazidos por esse software juntamente com outros sistemas algébricos são a computação algébrica e a programação simbólica. A computação algébrica é uma área que teve um forte desenvolvimento nas décadas de 60 e 70, quando foram encontrados importantes algoritmos para integração analítica e fatoração de polinômios. Estes algoritmos estão baseados na Álgebra Moderna, que guia toda a implementação do núcleo de qualquer sistema algébrico. No início do desenvolvimento desta área, uma série de tentativas foram feitas para usar recursos heurísticos provenientes da Inteligência Artificial, no entanto os resultados foram ineficientes. Os programas para integração analítica eram lentos, resolviam algumas integrais difíceis, porém falhavam em integrais simples que qualquer aluno de Cálculo

consegue determinar.

O Maple é uma linguagem de programação simbólica. Os construtores deste sistema optaram em desenvolver um pequeno núcleo escrito na linguagem C gerenciando as operações que necessitam de maior velocidade de processamento e, a partir deste núcleo, desenvolveram uma nova linguagem. O próprio Maple foi escrito nesta nova linguagem. Noventa e cinco por cento dos algoritmos estão escritos na linguagem Maple e eles estão acessíveis ao usuário. Esta opção dos seus arquitetos é muito saudável, pois uma linguagem que pode gerar todo um sistema algébrico do porte do Maple, certamente é uma boa linguagem de programação.

2. A Worksheet

Nos microcomputadores com o Maple instalado, a worksheet é disparada clicando-se no ícone do programa. Em outros sistemas, ela é disparada pelo comando `xmaple` (ou `maple`) dado no sinal de pronto do sistema operacional. Ela é o principal meio para gravar e ler os trabalhos desenvolvidos no Maple.

A worksheet utiliza os recursos de janelas para facilitar interação do usuário com o Maple. Por exemplo, um comando batido errado pode ser facilmente corrigido voltando-se o cursor para a posição do erro e substituindo os caracteres errados. Não há necessidade de digitar todo o comando novamente. Na worksheet, um usuário pode desenvolver a solução de um problema usando o Maple, tecer comentários, colar gráficos e gravar todo o conjunto em um arquivo para ser lido e eventualmente modificado posteriormente. A worksheet pode ser impressa selecionando-se a opção `print` ou pode ser automaticamente convertida em um arquivo `Latex`. Um exemplo de uso das worksheets é esse curso. Ele foi apresentado e as notas impressas a partir de worksheets.

A worksheet é um caderno virtual de anotações de cálculos. A vantagem do caderno virtual é que qualquer coisa já escrita pode ser modificada sem necessidade de fazer outras alterações. O resto do trabalho se ajusta automaticamente às mudanças. Essa idéia é a mesma dos processadores de textos que vêm gradativamente substituindo as máquinas de escrever. A worksheet não é um processador de textos. Ela funciona de maneira satisfatória como um editor de textos, e a parte referente ao processamento de textos pode ser feita no `Latex`, pois a worksheet tem interface com este processador. No desenvolvimento de um trabalho usando a worksheet, é importante que ele seja feito em ordem e que todo rascunho seja apagado assim que cumprido seu objetivo. O comando `restart` pode encabeçar o trabalho. Depois de gravar a worksheet, o usuário pode sair do Maple. No momento em que a worksheet é lida novamente, os resultados que aparecem na tela não estão na memória ativa do Maple. É necessário processar os comandos novamente para ativar os resultados.

A worksheet tem quatro tipos de linhas que são: as linhas de entrada de comando, geralmente precedidas pelo sinal de prompt "`>`", as linhas de saída dos comandos, as linhas de texto e as linhas de gráfico. Algumas dessas linhas podem ser convertidas umas nas outras. Em geral, as linhas de entrada, de saída e de texto podem ser convertidas entre si. As versões de worksheet para estações de trabalho e para microcomputadores não são iguais entre si, porém na grande maioria dos casos, tudo o que um usuário faz na worksheet de uma estação de trabalho pode ser feita na worksheet de um micro e vice-versa.

As linhas de saída usam os recursos gráficos das janelas para escrever as letras, os símbolos e desenhar os gráficos. O sinal de integral aparece na tela como int, o somatório como sum e as letras gregas como alpha, beta, gamma, Existe uma opção que faz com que as linhas de saídas usem os mesmos caracteres do teclado. Essa opção é útil para gravar resultados em um arquivo ASCII (acrônimo de American Standard Code for Information Interchange). A worksheet pode ser gravada com a terminação .mws, sendo ela própria é um arquivo ASCII. Isso significa que ela pode ser enviada por correio eletrônico. É claro que a pessoa que recebe tem que editá-la e retirar o cabeçalho do correio para que ela seja lida corretamente pelo Maple. Se a worksheet for salva com o a terminação .m , ela é salva no formato interno do Maple. A versão V Release 4 , 5, Maple 6, 7, 8 e 9. possuem diversos recursos para escrever textos. É possível criar seções e sub-seções. As letras podem ter diversos tamanhos e estilos, podem ser em itálico ou em negrito. É possível criar hiperlinks que conectam diversas worksheets. A partir desses hiperlinks pode-se navegar através das worksheets.

Na próxima seção faremos uma breve exposição sobre a manipulação de worksheets.

3. Noções básicas sobre a manipulação de Worksheets

O ambiente de worksheet do Maple consiste em um conjunto de construtos de documentação: *grupos de execução*, *spreadsheets (planilhas)*, *parágrafos*, *seções e hyperlinks*.

Grupos de execução e spreadsheets ajudam o usuário a **interagir** com a máquina computacional do Maple. Eles fornecem os meios primários pelos quais o Maple é requisitado para executar tarefas específicas e mostrar os resultados.

Parágrafos, seções e hyperlinks existem para ajudar o usuário a **documentar e organizar** os resultados.

3.1 Interagindo com Maple

3.1.1 Grupos de execução

Sequências de comandos de Maple, chamadas **grupos de execução**, servem para dar

uma descrição algorítmica de como um particular problema matemático é resolvido. Os grupos de execução dão os elementos fundamentais de computação da worksheet. Seu objetivo primário é combinar um ou mais comandos de Maple e seus resultados em uma única unidade reexecutável. Ele é facilmente reconhecível pelo grande colchete imediatamente à esquerda do prompt de comando. Um grupo de execução é criado através do menu *insert*.

Exemplo1. Quando o cursor é colocado em qualquer ponto do grupo de execução, e o comando enter é dado, as operações evidentes na expressão de entrada abaixo são realizadas em sequência e o resultado é apresentado no final :

```
> y:=expand((x+4*a)^2-(x+4*a)^3+x^3);
```

$$y := x^2 + 8 x a + 16 a^2 - 12 x^2 a - 48 x a^2 - 64 a^3 \quad (3.1.1.1)$$

O cursor é levado automaticamente para uma nova linha de comando em outro grupo de execução. Note que para modificar os polinômios envolvidos na expressão acima, basta levar o cursor novamente à linha de comando no grupo de execução, fazer as modificações e dar enter.

Exercício1. Modifique o lado direito da expressão anterior.

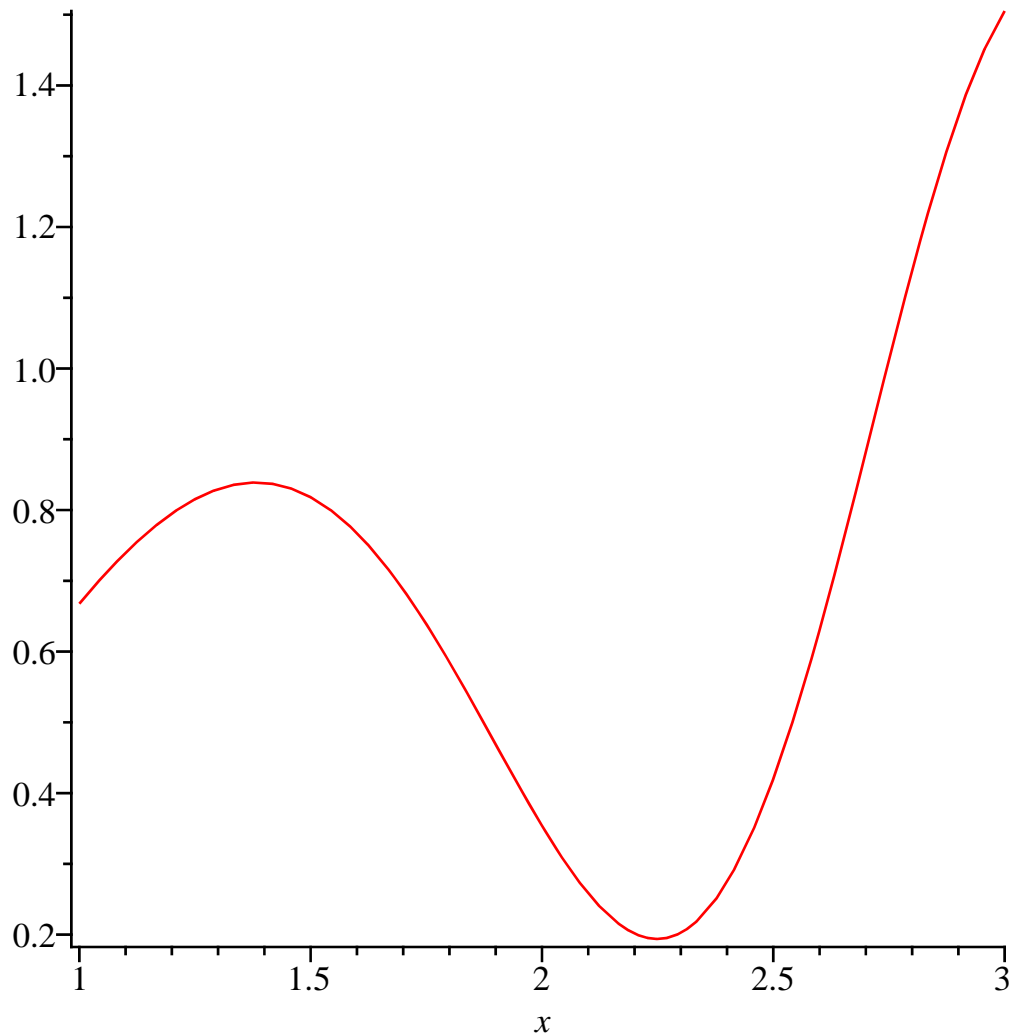
Exemplo2. Um grupo de execução pode conter vários comandos, na mesma ou em diferentes linhas de comando:

```
> y:=diff(sin(x)^x,x); z:=int(sin(x)^2,x);
```

```
> plot(y+z,x=1..3);
```

$$y := \sin(x)^x \left(\ln(\sin(x)) + \frac{x \cos(x)}{\sin(x)} \right)$$

$$z := -\frac{1}{2} \sin(x) \cos(x) + \frac{1}{2} x$$



Exercício2. (a) Volte ao Exemplo 1 e faça um gráfico $y(x)$, para algum valor específico de do parâmetro a , utilizando o prompt em aberto. Não esqueça de definir y novamente no grupo de execução anterior, caso contrário a expressão para y será aquela definida no Exemplo 2. (b) Coloque estes dois comandos em um mesmo grupo de execução utilizando a opção **join execution groups** (ou F4) no menu Edit.

▼ 3.1.2 Spreadsheets

Spreadsheets ou planilhas similares às do Excell são disponíveis nas versões W98, NT e Macintosh do Maple. Uma planilha simbólica pode ser criada através do menu *insert*. Ela vai aparecer dentro de um grupo de execução. Como exemplo vamos construir uma tabela para integrais envolvendo e^x .

	A	B	C	D
1	<i>Expressão geral</i>	<i>Integral</i>	<i>Valor da integral</i>	
2	1	$\int e^x dx$	e^x	
3	x	$\int x e^x dx$	$x e^x - e^x$	
4	x^2	$\int x^2 e^x dx$	$x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x$	
5	$\sin(x)$	$\int \sin(x) e^x dx$	$-\frac{1}{2} e^x \cos(x) + \frac{1}{2} \sin(x) e^x$	
6	$\cos(x)$	$\int e^x \cos(x) dx$	$\frac{1}{2} e^x \cos(x) + \frac{1}{2} \sin(x) e^x$	
7	$\tan(x)$	$\int \tan(x) e^x dx$	$-I e^x - I \left(\int \left(-\frac{2 e^x}{(e^{Ix})^2 + 1} \right) dx \right)$	
8				
9				

Exercício 3. Reconstrua a planilha acima.

As fórmulas nas células podem ser transportadas para linhas de comando da worksheet através de copy/paste e vice versa.

▼ 3.1.3 Construindo e executando comandos

Há três modos básicos para criar comandos e resultados em Maple

▼ *Comandos digitados e paletas*

Linhas de comando vazias podem ser criadas inserindo um grupo de execução (utilizando o menu insert ou o símbolo [$\>$] no menu de ferramentas). Os comandos são executados escrevendo-os no prompt do Maple e pressionando *enter*. Algumas operações e símbolos, assim como matrizes, podem ser introduzidos através de três paletas. Elas podem ser ativadas a partir do menu **View/Palletes**.

Exercício 4. Utilize o comando *inverse(A)* do Maple para inverter a matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 9 & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Nota: Para que esta operação seja possível é necessário carregar antes o pacote de álgebra linear *linalg*, ou *LinearAlgebra* o que pode ser feito com o comando *with(linalg)* ou *with(LinearAlgebra)*.

Utilizando menus de contexto

Resultados de Maple já existentes podem ser utilizados para sugerir e construir novas ações. Para obter na tela uma lista de ações sugeridas, marque e pressione o botão direito do mouse sobre o objeto (um resultado). A lista de ações resultante é chamada um menu de contexto, e está customizada para refletir as propriedades do objeto selecionado.

Exercício 5. Reproduza em uma worksheet separada o procedimento abaixo. No caso selecionamos a segunda solução e, escolhendo a opção copy transformamos-la para o formato de entrada (paste). O nome s1 foi adicionado manualmente.

```
> solve(a*x^2-3*x+a,x);
```

$$\frac{1}{2} \frac{3 + \sqrt{9 - 4a^2}}{a}, -\frac{1}{2} \frac{-3 + \sqrt{9 - 4a^2}}{a} \quad (3.1.3.2.1)$$

```
> s1:=1/2*(2-2*sqrt(1-a^2))/a;
```

$$s1 := \frac{1}{2} \frac{2 - 2\sqrt{1 - a^2}}{a} \quad (3.1.3.2.2)$$

Exercício 6.

(a) Considere resultado do primeiro grupo de execução do **Exercício 5**. Utilize o menu de contexto para determinar a integral das duas soluções com relação a a . Faça com elas tenham respectivamente os nomes int1 e int2.

(b) Considere o resultado do segundo grupo de execução acima. Utilize o menu de contexto para converter a igualdade para o formato LaTeX (neste caso, em que a expressão aparece sozinha, não é necessário marcar a expressão).

Exercício 7. Utilize o menu de contexto para obter o gráfico da função $y = \sin(xz)$.

Dragging e Dropping

```
> restart:
```

Fórmulas podem ser transportadas entre linhas de comando de qualquer worksheet diretamente por seleção e arraste. Uma expressão no formato de saída pode ser convertida para o formato de entrada simplesmente selecionando a expressão e arrastando-a para uma linha de comando vazia. Gráficos simultâneos podem ser construídos arrastando-se a expressão no formato de saída do Maple até o ambiente gráfico existente, anteriormente criado via smartplots.

Exercício 8. Selecione o lado esquerdo da expressão que define **s1** no **Exercício 5** e arraste-o até uma linha de comando vazia. Repita o mesmo procedimento selecionando agora a expressão inteira. Qual a diferença ?

Exercício 9a. Utilize o menu de contexto para gerar o gráfico de $y := \frac{\partial}{\partial x} \cos(x^2 + z)$. (Arraste a expressão acima para uma worksheet e depois a recupere com undo). Em seguida arraste o gráfico para uma linha vazia sem o prompt. Modifique a expressão e arraste de volta a expressão para o ambiente gráfico. Este procedimento só funciona para smartplots 3D.

Exercício 9b. Gere gráficos simultâneos em 2D utilizando arraste. Este procedimento só funciona com smartplots.

3.2 Organizando documentos

Documentos consistem de uma sequência de parágrafos descritivos, grupos de execução, spreadsheets e gráficos. Estes componentes podem ser reorganizados em uma estrutura hierárquica baseada em seções de subseções. Marcadores de referências, chamados bookmarks, podem ser colocados ao longo do documento e hyperlinks podem ser usados para saltar de um lugar a outro dentro de um documento. Trataremos esses tópicos com detalhe a seguir

3.2.1 Parágrafos e texto

Um *parágrafo* em uma worksheet é análogo ao parágrafo encontrado em um típico processador de textos. Parágrafos podem conter texto com estilos particulares, modo matemático e gráficos, incluindo cópias de saídas de Maple. Um parágrafo pode estar contido em um [grupo de execução](#). Parágrafos podem ser criados clicando **Insert** na barra de menus. O estilo dos parágrafos pode ser personalizado escolhendo **Styles**, do menu **Format**. Estilos em trechos selecionados podem ser escolhidos na barra de contexto. Dentro das áreas de texto é possível inserir equações formatadas e gráficos.

Exemplo 2. É possível escrever:

Para calcular a integral definida simbólica $\int_0^{\beta} e^{x^2} dx$ em Maple, digite:

```
> int(exp(x^2), x = 0 .. beta);
```

O modo matemático pode ser acionado escolhendo-se **Maple input** (Ctrl+M) no

menu *Insert*. Temos aqui algumas diferenças importantes nas duas últimas versões de Maple.

Maple V:

Note que a equação é digitada de acordo com a sintaxe do Maple, em um campo dentro da barra de contexto. A expressão formatada aparecerá depois de *enter*.

Para voltar ao modo texto escolha-se **Text input** (Ctrl+T). Caso o usuário preferir, é possível digitar a expressão desejada numa linha de comando, convertê-la para o modo matemático escolhendo x na barra de contexto. A expressão pode então ser selecionada e arrastada ou copiada para o local desejado do texto. É possível também arrastar a expressão diretamente no formato de entrada do Maple para um local onde o modo matemático já esteja acionado dentro do texto (Ctrl-M).

Maple 6,7,8,9:

Note no menu *Insert*, que para reproduzir os resultados descritos no parágrafo anterior, deveríamos selecionar **Standard Math** ou Ctrl-R, para criar uma entrada em modo matemático dentro do texto. No entanto, o procedimento mais simples neste caso para digitar uma equação é utilizar Maple Input ou Ctrl-M, que faz com que a equação apareça no formato de entrada do Maple no próprio texto, em vermelho. Em seguida a expressão pode ser convertida para o formato matemático clicando em x à esquerda na barra de contexto. Como no caso do Maple V, os modos de entrada ou saída podem ser alternados clicando-se no maple verde. Ou seja, os caracteres em vermelho são de entrada, não importando o formato (Maple input ou Standard Math input), são executáveis clicando-se em $!$ na barra de contexto.

Exercício 10. Reproduza o **Exemplo 2**, usando outra expressão.

3.2.2 Seções

O que você acabou de expandir agora é uma seção (section). No menu *Insert*, a escolha de **Section** abre outra seção. Subsection abre uma subseção dentro desta. Para transformar uma seção num parágrafo simples, no menu *Format* escolha *Outdent*. Use **Indent** para inserir um dado parágrafo dentro da seção

Exercício 11. Reproduza os cabeçalhos desta worksheet. Inclua subseções.

Exercício 12. Expanda e colapse todas as seções desta worksheet através do menu **View**.

3.2.3 Hyperlinks

Um hyperlink é uma pedaço de texto que faz uma conexão, quando você dá um clic sobre ele, para uma outra parte da mesma worksheet, de outra worksheet ou de uma página de ajuda, sendo portanto uma ferramenta de navegação. Por default, Maple mostra os hyperlinks como um texto sublinhado na cor cyan. Por exemplo, clicando [aqui](#) o cursor é levado para seção 2.1.2 sobre spreadsheets. Selecionando um nome de bookmark leva o cursor a um ponto especificado da worksheet.

Um pré-requisito para hyperlinks são bookmarks. Um **bookmark** é um nome que identifica uma particular localização na worksheet. Podemos acessar uma lista de

bookmarks da worksheet corrente selecionando **Bookmarks** no menu **View**. A seleção de um nome de bookmark move o cursor a uma posição especificada da worksheet. Um hyperlink deve estar associado a um nome de bookmark. Por exemplo, vamos supor que queremos fazer um hyperlink para a seção 2.2.1. O primeiro passo é definir o bookmark. Para isso devemos levar o cursor para a linha da seção 2.2.1 desta worksheet, selecionar **Bookmarks** no menu **View** e selecionar **Edit Bookmark**. Um nome adequado deve então ser digitado. Em seguida devemos inserir o texto que deve aparecer no hyperlink. No menu **Insert** selecionamos **Hyperlink**, digitamos o texto e escolhemos da lista o nome adequado entre todos os bookmarks.

Exercício 13. Faça um hyperlink para alguma seção desta worksheet.

4. Utilizando como calculadora

Obviamente, o Maple não vai substituir a sua calculadora de bolso. Se você deseja simplesmente fazer a adição de alguns números, o Maple não é o método mais indicado para realizar esta tarefa. Portanto a intenção desta seção não é dizer pra que a sua calculadora seja jogada fora, e sim mostrar como se trabalha com operações básicas de matemática, afinal elas estarão presentes sempre que o Maple for usado. O Maple realiza as operações fundamentais tais como soma, multiplicação, potenciação e fatorial.

$$\begin{array}{l} > 5+7; \\ \qquad\qquad\qquad 12 \end{array} \qquad (4.1)$$

$$\begin{array}{l} > 13*33; \\ \qquad\qquad\qquad 429 \end{array} \qquad (4.2)$$

$$\begin{array}{l} > 3^4; 5!; \\ \qquad\qquad\qquad 81 \\ \qquad\qquad\qquad 120 \end{array} \qquad (4.3)$$

Note que todas as entradas precisam ser terminadas com ponto-e-vírgula (;) e multiplicações são feitas com o asterisco (*). É possível escrever vários cálculos em uma mesma linha como foi feito na linha anterior ou como mostra a linha seguinte:

$$\begin{array}{l} > 4*9, 5^3, 7!; \\ \qquad\qquad\qquad 36, 125, 5040 \end{array} \qquad (4.4)$$

Ao computar uma fração em ponto flutuante (**floating point**) como, por exemplo, 0,8333 representando $5/6$, ocorre um erro de precisão. Por este motivo o Maple permite a representação de frações de forma exata.

$$\begin{array}{l} > 5/6; (34*3+7/11)^2; \\ \qquad\qquad\qquad \frac{5}{6} \end{array}$$

$$\frac{1274641}{121} \quad (4.5)$$

Sendo que a qualquer momento pode ser visto a aproximação decimal com o comando `evalf` (**evaluate in floating point**):

```
> evalf(%);
```

$$10534.22314 \quad (4.6)$$

O símbolo de porcentagem (%) no Maple VR5 está relacionado com o último valor calculado. O seu valor não é necessariamente o resultado do comando imediatamente acima, pois numa *worksheet* podemos processar os comandos numa ordem diferente daquela que aparece na tela. Podemos aproximar o resultado para qualquer número de dígitos diferente de 10, que é o valor **default**.

```
> evalf(%%,40);
```

$$10534.22314049586776859504132231404958678 \quad (4.7)$$

Este raciocínio também é considerado ao manipular números irracionais.

```
> sqrt(3),sin(Pi/4);
```

$$\sqrt{3}, \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (4.8)$$

Repare a diferença entre o cálculo simbólico e numérico:

```
> sqrt(2)*sqrt(8)-4;
```

$$0 \quad (4.9)$$

```
> evalf(sqrt(2))*evalf(sqrt(8))-4;
```

$$-2. 10^{-9} \quad (4.10)$$

Na computação simbólica, não há erros de arredondamento e o Maple aplica procedimentos matemáticos para a simplificação de expressões. A precisão de cálculos numéricos é determinado pela variável global **Digits** cujo valor *default* é 10. É possível alterar o seu conteúdo de forma a mudar a precisão do cálculo desejado.

```
> Digits;
```

$$10 \quad (4.11)$$

```
> Digits:=50;
```

$$Digits := 50 \quad (4.12)$$

```
> evalf(sqrt(2))*evalf(sqrt(8))-4;
```

$$-3. 10^{-49} \quad (4.13)$$

```
> Digits:=10:
```

Note que um aumento do número de dígitos feito após o cálculo do **evalf** aparentemente aumenta a precisão do cálculo.

```
> sq2:=evalf(sqrt(2));  
sq2 := 1.414213562 (4.14)
```

```
> evalf(1/sq2^2,50);  
0.500000000026381803913919991547705793946024635015557 (4.15)
```

O resultado do cálculo em ponto flutuante de 50 dígitos, aplicado em um resultado calculado com apenas 10, indica que a partir do décimo primeiro dígito os números já não correspondem aos seus valores reais. Ou seja, qualquer manipulação posterior à atribuição de `sq2` não poderá ser mais precisa.

O Maple é indiferente para cálculos contendo números complexos e trabalha com eles muito bem. O símbolo que representa $\sqrt{-1}$ é a letra *i* maiúscula (I).

```
> -20*I+200*I/(20+10*I);  
4 - 12 I (4.16)
```

```
> abs(4-12*I);  
4*sqrt(10) (4.17)
```

```
> evalf(%);  
12.64911064 (4.18)
```

Matrizes podem ser definidas com o comando **array**.

```
> mat1:=array([[1,2,3],[7,11,-13]]);  
mat1 :=  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & -13 \end{bmatrix}$  (4.19)
```

```
> mat2:=array([[0,7],[-3,17],[5,-1]]):
```

```
> mat3:=evalm(mat2&*mat1+[[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]]);  
mat3 :=  $\begin{bmatrix} 50 & 77 & -91 \\ 116 & 182 & -230 \\ -2 & -1 & 29 \end{bmatrix}$  (4.20)
```

Comandos adicionais para o cálculo de matrizes podem ser achados no pacote **linalg**. Este precisa ser ativado com o comando `with` antes de usar suas funções. Dois avisos indicam que os comandos `norm` e `trace` foram redefinidos. O determinante e a inversa de uma matriz podem ser calculados sem dificuldade.

```
> with(linalg):
> det(mat3);
```

6224 (4.21)

```
> inverse(mat3);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{631}{778} & -\frac{1071}{3112} & -\frac{287}{1556} \\ -\frac{363}{778} & \frac{317}{1556} & \frac{59}{389} \\ \frac{31}{778} & -\frac{13}{778} & \frac{21}{778} \end{bmatrix}$$

(4.22)

Funções estatísticas também possuem seu próprio pacote. No exemplo abaixo, são calculados a média, a variância e o desvio padrão de uma sequência de números:

```
> with(stats):with(describe):
> data:=[10.2,9.9,10,9.95,10,10.1,10.4,9.3,9.85,10.05,
10.1];
```

`data := [10.2, 9.9, 10, 9.95, 10, 10.1, 10.4, 9.3, 9.85, 10.05, 10.1]` (4.23)

```
> mean(data);
```

9.986363636 (4.24)

```
> variance(data);
```

0.06776859503 (4.25)

```
> sqrt(%);
```

0.2603240193 (4.26)

Exercício 14. Inverta uma matriz de Hilbert 10 x 10 (sugestão: utilize help para obter informações sobre matrizes de Hilbert)

5. Regras de Sobrevivência

Este capítulo oferece dicas sobre como evitar alguns enganos aos quais iniciantes estão sujeitos a cometer. Mesmo para aqueles que já utilizaram o Maple mais de uma vez, ler esta seção será de alguma utilidade. Ela poderá parecer um pouco redundante mas, por outro lado, vai poupar esforços na tentativa de encontrar erros de sintaxe futuramente. Os problemas aqui descritos serão vistos nos capítulos seguintes, porém estarão inseridos em contextos diferentes que vão supor que o leitor já os conheça.

Os comandos do Maple normalmente terminam com um ponto-e-vírgula (;) seguido da tecla [Enter]. Com isso o Maple avalia a entrada, faz o cálculo e imprime o resultado na tela. Ao invés de usar o ponto-e-vírgula, pode ser usado os dois pontos (:) no final do comando. Neste caso, o cálculo é feito como anteriormente, mas o resultado não é colocado na tela. Seu uso previne que comandos

executados como passos intermediários de um estudo não ocupem muitas páginas com fórmulas de pouco interesse em relação ao resultado final.

Pode-se colocar alguns comandos na mesma linha. Estes comandos podem ser separados tanto por ponto-e-vírgula (;) como dois-pontos (:). É possível separar os cálculos com vírgulas (,) sem que se faça associações à variável. O Maple executa os cálculos um após o outro e coloca os resultados lado a lado. Para resultados curtos, este método possui a vantagem de economizar espaço na tela e permite a comparação de resultados numa mesma linha.

Por exemplo:

$$\begin{array}{l} > 2+3; \\ \qquad \qquad \qquad 5 \end{array} \qquad (5.1)$$

$$\begin{array}{l} > a:=3; b:=5; \\ \qquad \qquad \qquad a := 3 \\ \qquad \qquad \qquad b := 5 \end{array} \qquad (5.2)$$

$$\begin{array}{l} > a*b, a+b, a^b; \\ \qquad \qquad \qquad 15, 8, 243 \end{array} \qquad (5.3)$$

$$\begin{array}{l} > a*b; a+b; a^b; \\ \qquad \qquad \qquad 15 \\ \qquad \qquad \qquad 8 \\ \qquad \qquad \qquad 243 \end{array} \qquad (5.4)$$

O resultado de até três cálculos anteriores podem ser acessados pelos comandos %, %% e %%%. Se após o um cálculo, você mover o cursor para uma posição diferente na **worksheet**, o símbolo de percentagem não irá se referir ao comando exatamente acima e sim ao último cálculo executado.

$$\begin{array}{l} > (c+d)^3: \% = \text{expand} (\%); \\ \qquad \qquad \qquad (c + d)^3 = c^3 + 3 c^2 d + 3 c d^2 + d^3 \end{array} \qquad (5.5)$$

A expressão anterior mostra uma expansão do cubo da soma de duas variáveis. O primeiro comando apenas formula a expressão a ser expandida e não imprime o resultado na tela. No segundo comando o resultado é acessado duas vezes, primeiro sem expandir e depois expandindo.

É preciso tomar cuidado ao usar os símbolos de percentagem. Para pessoas pouco familiarizadas com estes operadores é aconselhável associar o resultado obtido à uma variável. Desta forma a variável pode ser acessada posteriormente quantas vezes quiser e não apenas três.

No exemplo a seguir é mostrado duas formas de ser fazer a associação das soluções de uma equação do segundo grau a uma variável:

$$\begin{array}{l} > \text{solve}(x^2+x-1,x); \\ \qquad \qquad \qquad -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5} \end{array} \qquad (5.6)$$

$$\begin{array}{l} > \text{solucoes1}:=\%; \\ \qquad \qquad \qquad \text{solucoes1} := -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5} \end{array} \qquad (5.7)$$

```
> solucoes2:=solve(x^2+x-1,x);
```

$$\text{solucoes2} := -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5} \quad (5.8)$$

A manipulação de uma parte do resultado fica mais fácil ao associá-lo a uma variável. Esta necessidade ocorre frequentemente em comandos como o `solve` que retorna mais de uma solução. Um meio de acessar os elementos do resultado é colocando o índice da solução desejada entre colchetes ([]).

```
> x1:=solucoes1[1];
```

$$x1 := -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5} \quad (5.9)$$

A princípio esta é uma forma aparentemente boa, porém pode dar problemas depois: a ordem das soluções retornadas pelo comando `solve` não é fixa. Portanto executando o comando novamente, pode ser que a ordem venha trocada. Neste caso se tivermos interesse, por exemplo, na solução de menor valor, poderíamos usar o comando `min`. Para isto todas as variáveis da expressão deverão estar definidas.

```
> x1:=min(solucoes1);
```

$$x1 := -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5} \quad (5.10)$$

O Maple VR5 distingue as aspas duplas (") das aspas simples (') do plique (ˆ) - ou acento agudo e grave. O primeiro serve para representar strings de caracteres. O segundo é usado para retardar uma avaliação matemática e o terceiro

também representa *strings* porém de utilidade diversificada em relação ao primeiro.

O Maple avalia expressões matemáticas automaticamente:

```
> x:=Pi;
```

$$x := \pi \quad (5.11)$$

```
> sin(x/2);
```

$$1 \quad (5.12)$$

Neste exemplo, a variável `x` foi imediatamente substituída pelo seu valor. Algumas vezes não é desejado que isto aconteça. As aspas simples servem para impedir que esta avaliação se efetue. E neste caso pode ser feito de duas formas: retardando a avaliação de `x` ou de toda a expressão `sin(x)`:

```
> expr1:=sin('x'/2);expr2:='sin(x/2)';
```

$$\text{expr1} := \sin\left(\frac{1}{2} x\right)$$

$$\text{expr2} := \sin\left(\frac{1}{2} x\right)$$

(5.13)

Nos cálculos subsequentes a avaliação será efetuada e o valor da variável será substituído.

```
> expr1; expr2;
```

1

1

(5.14)

Pode-se colocar quantos níveis de retardo se desejar porém não é comum utilizar mais de um. Seria mais simples limpar o conteúdo da variável x em vez de colocar várias aspas simples juntas.

```
> 'x';
```

x (5.15)

```
> %;
```

x (5.16)

```
> %;
```

π (5.17)

À primeira vista, a função do clique pode parecer igual às aspas simples.

```
> 'x+1';
```

$x + 1$ (5.18)

```
> `x+1`;
```

$x + 1$ (5.19)

Porém só quando forçamos uma avaliação é que percebemos a diferença.

```
> eval('x+1');
```

$\pi + 1$ (5.20)

```
> eval(`x+1`);
```

$x + 1$ (5.21)

Os caracteres contidos entre cliques não são interpretados como expressões matemáticas, mas como um conjunto de caracteres. A avaliação não só não é retardada, como se torna impossível. Os cliques são normalmente usados para criar nomes de variáveis que usem caracteres especiais.

```
> `x/aux`:=3;
```

$x/aux := 3$ (5.22)

As aspas duplas, enfim, determinam um conjunto de caracteres associados a um texto tal como o título de um gráfico, uma mensagem a ser impressa na tela ou o nome de um arquivo no qual se deseja gravar algum resultado.

```
> print(`Mensagem na tela!`);
```

Mensagem na tela! (5.23)

Alguns problemas frequentemente ocorrem por causa de variáveis que foram inicializadas e foram usadas em expressões posteriormente. Ao tentarmos resolver uma equação em x ocorre o seguinte problema.

```
> solve(x^2-2*x,x);
```

Error, (in solve) a constant is invalid as a variable, Pi

Se olharmos algumas páginas antes vamos perceber que a variável x recebeu o valor π . Em nenhum momento esta variável teve o seu conteúdo apagado e, conseqüentemente, ele se mantém. Uma forma de limpar o conteúdo de uma variável é associar esta variável a ela mesma com um nível de retardo. Se preferir apagar o conteúdo de todas as variáveis usadas até o momento, o comando **restart** executa

esta tarefa.

```
[ > x:='x';
```

$x := x$

(5.24)

Ou equivalentemente:

```
[ > unassign('x');
```

Agora podemos resolver a equação em x .

```
[ > solve(x^2-2*x,x);
```

0, 2

(5.25)