Probabilidade e Estatística EST0003

2009/2

Prof. Fernando Deeke Sasse

Problemas Resolvidos - Probabilidade

1. Um fabricante de lâmpadas para faróis automotivos testa as lâmpadas sob condições de alta umidade e alta temperatura, usando a intensidade e vida útil como parâmetros de interesse. A tabela abaixo mostra a performance de 130 lâmpadas.

		vida útil	
		satisfatório	insatisfatório
intensidade	satisfatório	117	3
	insatisfatório	8	2

(a) Qual é a probabilidade de que uma lâmpada selecionada aleatoriamente seja insatisfatória sob qualquer critério?
(b) Clientes exigem 95% de resultados satisfatórios. O fabricante pode atender a esta exigência?
Solução.
(a) A tabela apresenta dados mutuamente excludentes, de modo as probabilidades de cada evento se somam:

```
> (8+3+2)/130;
```

$$\frac{1}{10} \qquad \textbf{(1.1)}$$

(b) Como a probabilidade da lâmpada não apresentar defeito é 1 - 1/10 = 0.9, a exigência não é satisfeita.

2. Discos de policarbonato são analisados no que se refere a resistência a arranhões e resistência a choque. Os resultados de 100 discos são mostrados abaixo

		resistência a choques	
		alta	baixa
resistência a arranhões	alta	70	9
	baixa	16	5

Considere o evento A de que um disco tenha alta resistência a choques e o evento B de que ele tenha alta resistência a arranhões.
(a) Se um disco é selecionado aleatoriamente qual é a probabilidade de que ele tenha alta resistência a choque e arranhões?
(b) Se um disco é selecionado aleatoriamente qual é a probabilidade de que ele tenha alta resistência a choque ou arranhões?
(c) São os eventos A e B mutuamente excludentes?
(d) Determine P(A' ou B), P(A' ou B') e P(A' e B').
(e) Determine P(A | B) e P(B | A).
Solução.
(a) Devemos determinar P(A e B). Da tabela vemos imediatamente que esta probabilidade é:

```
> P(A and B):=70/100;
```

$$P(A \text{ and } B) := \frac{7}{10} \quad \textbf{(2.1)}$$

(b) Devemos determinar P(A ou B) = P(A) + P(B) - P(A e B) = 1 - P(A' e B')

```
> P(A or B):=79/100+86/100-70/100;
```

$$P(A \text{ or } B) := \frac{19}{20} \quad \textbf{(2.2)}$$

Usando a última fórmula temos também

```
> 95/100;
```

$$\frac{19}{20} \quad \textbf{(2.3)}$$

(c) Não, como visto no item (a)

(d) P(A' ou B) = P(A') + P(B) - P(A' e B)

```
> 14/100+79/100-9/100;
```

$$\frac{21}{25} \quad \textbf{(2.4)}$$

P(A' ou B') = P(A') + P(B') - P(A' e B')

```
> 14/100+21/100-5/100;(16+5+9)/100;
```

$$\frac{3}{10}$$

$$\frac{3}{10} \quad \textbf{(2.5)}$$

Por uma leitura direta da tabela,

```
> (16+5+9)/100;
```

$$\frac{3}{10} \quad \textbf{(2.6)}$$

Da tabela temos diretamente **P(A' e B')=** $\frac{5}{100}$

(e) Por uma leitura direta da tabela obtemos imediatamente as probabilidades condicionais:

```
> P(A,B):=70/79;
```

$$P(A, B) := \frac{70}{79} \quad \textbf{(2.7)}$$

```
> P(B,A):=70/86;
```

$$P(B, A) := \frac{35}{43} \quad \textbf{(2.8)}$$

ou, usando a fórmula para a probabilidade condicional,

```
> P(B):=79/100;P(A):=86/100;
```

$$P(B) := \frac{79}{100}$$

$$P(A) := \frac{43}{50} \quad \textbf{(2.9)}$$

```
> P(A,B):=P(A and B)/P(B);P(B,A):=P(A and B)/P(A);
```

$$P(A,B) := \frac{70}{79}$$

$$P(B,A) := \frac{35}{43} \tag{2.10}$$

```
> ;
```

3. Um lote de 100 chips semicondutores contém 20 que são defeituosos.
(a) Dois chips são selecionados aleatoriamente do lote, sem substituição. Qual a probabilidade de que o segundo seja defeituoso?
(b) Três chips são selecionados aleatoriamente do lote, sem substituição. Qual a probabilidade de que todos sejam defeituosos?
(c) Três chips são selecionados aleatoriamente do lote, sem substituição. Qual a probabilidade de que ao menos um deles seja defeituoso?
Solução.
(a) Seja d o evento de que o chip seja defeituoso e p que seja perfeito. Então devemos calcular P(pd) +P(dd). Ou seja,

```
> (80/100)*(20/99)+(20/100)*(19/99);
```

$$\frac{1}{5} \tag{3.1}$$

(b)

```
> (20/100)*(19/99)*(18/98);
```

$$\frac{19}{2695} \tag{3.2}$$

```
> evalf(%);
```

$$0.007050092764 \tag{3.3}$$

(c) Devemos somar as probabilidades de que haja somente 1 chip defeituso com a probabilidade de que haja 2 chips defeituosos mais aquela de que haja três chips defeituosos.
p=P(dpp) + P(pdp) + P(ppd)+P(ddp)+P(dpd)+P(pdd)+P(ddd)

```
> P(dpp):=(20/100)*(80/99)*(79/98);P(pdp):=(80/100)*(20/99)*
  (79/98);P(ppd):=(80/100)*(79/99)*(20/98);
```

$$P(dpp) := \frac{632}{4851}$$

$$P(pdp) := \frac{632}{4851}$$

$$P(ppd) := \frac{632}{4851} \tag{3.4}$$

```
> P(ddp):=(20/100)*(19/99)*(80/98); P(dpd):=(20/100)*(80/99)*
  (19/98); P(pdd):=(80/100)*(20/99)*(19/98);
```

$$P(ddp) := \frac{152}{4851}$$

$$P(dpd) := \frac{152}{4851}$$

$$P(pdd) := \frac{152}{4851} \tag{3.5}$$

```
> P(ddd):=(20/100)*(19/99)*(18/98);
```

$$P(ddd) := \frac{19}{2695} \tag{3.6}$$

Portanto, a probabilidade é dada por

```
> P(dpp)+P(pdp)+P(ppd)+P(ddp)+P(dpd)+P(pdd)+P(ddd);
```

$$\frac{3977}{8085} \tag{3.7}$$

```
> evalf(%);
```

$$0.4918985776 \tag{3.8}$$

```
> ;
```

4. Oito cavidades em uma ferramenta de injeção-molde produzem conectores plásticos que caem em um recipiente. Uma amostra é escolhida entre intervalos de minutos. Suponha que as amostras são independentes.

(a) Qual é a probabilidade de que 5 amostras sucessivas tenham sido produzidas na cavidade um do molde?

(b) Qual é a probabilidade de que 5 amostras sucessivas tenham sido produzidas em uma mesma cavidade do molde?

(c) Qual é a probabilidade de que 4 de 5 amostras sucessivas tenham sido produzidas na cavidade um do molde?

Solução.

Eventos:

E_i - conector foi produzido na cavidade i do molde, $i = 1..8$.

(a) Como os eventos são independentes, a intersecção dos 5 é igual ao seu produto:

```
> (1/8.)^5;
```

$$0.00003051757812 \tag{4.1}$$

(b) Pela independência dos eventos,

```
> 8*(1/8.)^5;
```

$$0.0002441406250 \tag{4.2}$$

(c) Note que o número de sequências em que 4 de 5 amostras foram produzidas no molde 1 é 5, de modo que

```
> 5*(1/8.)^4*(7/8);
```

$$0.001068115234 \tag{4.3}$$

5. No design preliminar de produtos são utilizadas avaliações de clientes. No passado, 95% dos produtos de alto sucesso receberam boas avaliações, 60% dos produtos de sucesso moderado receberam boas avaliações, e 10% dos produtos de pobre desempenho receberam boas avaliações. Além disso, 40% dos produtos tiveram alto sucesso, 35% tiveram sucesso moderado e 25% tiveram desempenho pobre.

(a) Qual é a probabilidade de que o produto consiga uma boa avaliação?

(b) Se um novo design obtém uma boa avaliação, qual a probabilidade de que ele tenha alto sucesso?

(c) Se um produto não recebe uma boa avaliação, qual é a probabilidade de que ele tenha alto sucesso?

Solução.
Eventos:
A - produto recebe boa avaliação
S - produto tem alto sucesso
M - produto tem médio sucesso
N - produto não faz sucesso
(a) Devemos calcular $P(A) := P(S)\ P(S, A) + P(M)\ P(M, A) + P(N)\ P(N, A)$

```
> restart:
> P(S):=0.4: P(M):=0.35: P(N):=0.25:
> P(A,S):=0.95: P(A,M):=0.6: P(A,N):=0.1:
> P(A):=P(S)*P(A,S)+P(M)*P(A,M)+P(N)*P(A,N);
```

$$P(A) := 0.615 \quad (5.1)$$

(b) Usando as fórmulas para probabilidade condicional temos

```
> P(S,A):=P(A,S)*P(S)/P(A);
```

$$P(S, A) := 0.6178861789 \quad (5.2)$$

(c)

```
> P(Ap,S):=1-P(A,S); P(Ap):=1-P(A);
```

$$P(Ap, S) := 0.05$$

$$P(Ap) := 0.385 \quad (5.3)$$

```
> P(S,Ap):=P(Ap,S)*P(S)/P(Ap);
```

$$P(S, Ap) := 0.05194805195 \quad (5.4)$$

```
> ;
```

6. Um software que detecta fraudes em cartes telefônicos detecta o número de das áreas metropolitanas onde as chamadas são originadas a cada dia. São obtidos os seguintes dados:
- 1% dos usuários legítimos chamam de duas ou mais áreas metropolitanas em um mesmo dia.
- 30% dos usuários fraudulentos chamam de duas ou mais áreas metropolitanas em um mesmo dia.
- A proporção de usuários fraudulentos é de 0.01%.
Se um mesmo usuário faz chamadas de duas ou mais áreas metropolitanas em um mesmo dia, qual é a probabilidade de que o usuário seja fraudulento?

Solução.
Eventos:
M - usuário faz chamadas de duas ou mais áreas metropolitanas em um mesmo dia
L - usuário é legítimo
F - usuário é fraudulento
Note que L e F são eventos mutuamente exclusivos e exaustivos.
Devemos calcular $P(F, M) := \dfrac{P(M, F)\ P(F)}{P(M, F)\ P(F) + P(M, L)\ P(L)}$.

```
> P(M,F):=0.3:P(M,L):=0.01:P(F):=0.0001:P(L):=1-P(F):
> P(F,M):=P(M,F)*P(F)/(P(M,F)*P(F)+P(M,L)*P(L));
```

$$P(F, M) := 0.002991325157 \quad (6.1)$$

7. Denotemos por E1, E2 e E3 amostras que satisfazem especificações de porcentagem de sólidos, peso molecular e cor, respectivamente. Um total de 240 amostras são classificadas de acordo com estas especificações de acordo estas especificações de acordo com a tabela abaixo:

E_3 yes

		E_2 yes	E_2 no	Total
E_1	yes	200	1	201
	no	5	4	9
Total		205	5	210

E_3 no

		E_2 yes	E_2 no	
E_1	yes	20	4	24
	no	6	0	6
Total		26	4	30

(a) E1, E2 e E3 são eventos mutuamente exclusivos?
(b) E1' , E2' e E3' são eventos mutuamente exclusivos?
(c) Determine P(E1' ou E2' ou E3').
(d) Qual é a probabilidade de que a amostra satisfaça todas as três especificações?
(e) Qual é a probabilidade de que a amostra satisfaça E1 ou E3?
(f) Qual é a probabilidade de que a amostra satisfaça E1 ou E2 ou E3?

Solução.
(a) Não. Note que E1 ∩E2 ∩ E3 = 200
(b) Não. Note que E1' ∩ E2' = 4

(c) Diretamente da tabela:

```
> 30/240+9/240+1/240;
```

$$\frac{1}{6} \tag{7.1}$$

O mesmo resultado pode obtido através da fórmula:

$$P(E_1 \cup E_2' \cup E_3') = P(E_1') + (E_2') + (E_3') - P(E_1' \cap E_2') - P(E_1' \cap E_3') - P(E_2' \cap E_3')$$

ou seja,

```
> P1:=(9+6)/240+(5+4)/240+30/240-4/240-6/240-4/240+0/240;
```

$$P1 := \frac{1}{6} \tag{7.2}$$

(d) Diretamente da primeira tabela vemos que

```
> 200/240;
```

$$\frac{5}{6} \tag{7.3}$$

(e) Diretamente da tabela vemos que

```
> 210/240+24/240;
```

$$\frac{39}{40} \tag{7.4}$$

(f)

```
> 210/240+24/240+6/240;
```

$$1 \tag{7.5}$$

8. Um lote de 140 chips semicondutores é inspecionado através da coleta de amostras de 5 chips. Suponha que 10 chips não satisfazem as exigências dos consumidores.
(a) Quantas amostras diferentes são possíveis?
(b) Quantas amostras de 5 elementos possuem exatamente um chip fora de conformidade?
(c) Quantas amostras de 5 elementos possuem ao menos um chip fora de conformidade?
Solução.
(a) Como o ordenamento na amostra não é importante, devemos calcular combinações de 140 elementos, 5 a 5. Ou seja,

```
> 140!/(5!)/(140-5)!;
```

$$416965528 \tag{8.1}$$

(b) Um subconjunto contendo exatamente um chip fora de conformidade pode ser formado escolhendo-se 1 entre 10 chips que não satisfazem as exigências, ou seja, 10 possibilidades. Em seguida selecionamos os subconjuntos correspondentes às 4 partes restantes a partir dos 130 chips que satisfazem as exigências. Ou seja,

```
> 10*(130!)/4!/(130-4)!;
```

$$113588800 \tag{8.2}$$

(c) Sejam os eventos
c- conforme
n - não conforme
Devemos agora somar todas as possibilidades: N({n,c,c,c,c}) + N({n,n,c,c,c}) + N({n,n,n,c,c}) + N({n,n,n,n,c}) + N({n,n,n,n,n})

```
> with(combinat):
```

```
> N([n,c,c,c,c]):=numbcomb(140,5);
```

$$N([n, c, c, c, c]) := 416965528 \tag{8.3}$$

```
> N([n,n,c,c,c]):=numbcomb(10,2)*numbcomb(130,3);
```

$$N([n, n, c, c, c]) := 16099200 \tag{8.4}$$

```
> N([n,n,n,c,c]):=numbcomb(10,3)*numbcomb(130,2);
```

$$N([n, n, n, c, c]) := 1006200 \tag{8.5}$$

```
> N([n,n,n,n,c]):=numbcomb(10,4)*numbcomb(130,2);
```

$$N([n, n, n, n, c]) := 1760850 \tag{8.6}$$

```
> N([n,n,n,n,n]):=numbcomb(10,5)*numbcomb(130,1);
```

$$N([n, n, n, n, n]) := 32760 \tag{8.7}$$

Portanto,

```
> N([n,c,c,c,c])+N([n,n,c,c,c])+N([n,n,n,c,c])+N([n,n,n,n,c])+N
```

```
([n,n,n,n,n]);
```

$$435864538 \quad (8.8)$$

```
> ;
```

9. Amostras de uma peça moldada de plástico são classificadas com base no acabamento da superfície e acabamento da borda. Os resultados envolvendo 110 partes são resumidos como segue:

		acabamento da borda	
		excelente	bom
acabamento da superfície	excelente	77	4
	bom	9	20

Denotando por A o evento correspondente a um acabamento de superfície excelente, e B o evento correspondente a um acabamento de borda excelente. Se uma parte é selecionada aleatoriamente, determine:

$$P(A),\ P(A'),\ P(B),\ P(A\cup B),\ P(A\cap B),\ P(A\cap B')$$

Solução

```
> restart:
> P(A):=(77+4)/110.;
```

$$P(A) := 0.7363636364 \quad (9.1)$$

```
> P(Ap):=(9+20)/110.;
```

$$P(Ap) := 0.2636363636 \quad (9.2)$$

```
> P(B):=(77+9)/110.;
```

$$P(B) := 0.7818181818 \quad (9.3)$$

```
> P(AeB):=77/110.;
```

$$P(AeB) := 0.7000000000 \quad (9.4)$$

```
> P(AouB):=P(A)+P(B)-P(AeB);
```

$$P(AouB) := 0.8181818180 \quad (9.5)$$

```
> P(AeBp):=4/110.;
```

$$P(AeBp) := 0.03636363636 \quad (9.6)$$

10. Um lote de 120 chips semicondutores contém 22 que são defeituosos.
(a) Dois chips são selecionados aleatoriamente do lote, sem substituição. Qual a probabilidade de que o segundo seja defeituoso?
(b) Três chips são selecionados aleatoriamente do lote, sem substituição. Qual a probabilidade de que todos sejam defeituosos?
(c) Três chips são selecionados aleatoriamente do lote, sem substituição. Qual a probabilidade de que ao menos um seja defeituoso?

Solução.

Eventos:
D: chip é defeituoso, N: chip não defeituoso
(a) Devemos determinar P2D = P(DD) + P(ND) :

```
> P(DD):=22/120*21/119; P(ND):=(120-22)/120*22/119;
```

$$P(DD) := \frac{11}{340}$$

$$P(ND) := \frac{77}{510} \tag{10.1}$$

```
> P2D:=P(DD) + P(ND);
```

$$P2D := \frac{11}{60} \tag{10.2}$$

```
> evalf(%);
```

$$0.1833333333 \tag{10.3}$$

(b)

```
> P(DDD):=22/120*21/119*20/118;
```

$$P(DDD) := \frac{11}{2006} \tag{10.4}$$

```
> evalf(%);
```

$$0.005483549352 \tag{10.5}$$

(c) Devemos calcular P = P(DDD)+P(DDN)+P(DND)+P(NDD)+P(DNN)+P(NDN)+P(NND)
Notemos que P(DDN) = P(NDD) = P(DND) e P(DNN) = P(NDN) = P(NND).

```
> P(DDN):=22/120*21/119*98/118;
```

$$P(DDN) := \frac{539}{20060} \tag{10.6}$$

```
> P(DNN):=22/120*98/119*97/118;
```

$$P(DNN) := \frac{7469}{60180} \tag{10.7}$$

Portanto

```
> P = P(DDD)+3*P(DDN)+3*P(DNN);
```

$$P = \frac{2299}{5015} \tag{10.8}$$

```
> evalf(%);
```

$$P = 0.4584247258 \tag{10.9}$$

11. Entre 5 engenheiros e 7 físicos, deve-se formar uma comissão de 2 engenheiros e 3 físicos. De quantas maneiras isso pode ser feito se:
(a) Qualquer engenheiro e qualquer físico pode ser selecionado.
(b) Um determinado físico deve ser incluído.
(c) Dois determinados engenheiros não devem ser incluídos.
Solução.

```
> with(combinat):
```

(a) Número de subconjuntos de engenheiros: C(5,2), número de subconjuntos de físicos: C(7,3)

```
> numbcomb(5,2)*numbcomb(7,3);
```
$$350 \tag{11.1}$$

(b)

```
> numbcomb(5,2)*numbcomb(6,2);
```
$$150 \tag{11.2}$$

(c)

```
> numbcomb(3,2)*numbcomb(7,3);
```
$$105 \tag{11.3}$$

12. Um inspetor trabalhando para uma companhia de manufatura tem uma probabilidade de 99% de identificar corretamente um item com defeito e 0.5% de chance de classificar incorretamente um produto bom como defeituoso. A companhia tem evidências de que sua linha produz 0.9% de ítens defeituosos.
(a) Qual a probabilidade de que um item selecionado para inspeção seja classificado como defeituoso?
(b) Se um item selecionado aleatoriamente é classificado como não-defeituoso, qual a probabilidade de que ele seja realmente bom?
Solução.
Eventos: D: componente tem defeito, C: inspetor identifica item como sendo defeituoso.
P(C|D) = 0.99, P(C|D') = 0.005, P(D) = 0.009
(a) P(C) =?
P(C) = P(C|D)P(D) + P(C|D')P(D')

```
> restart;
> P(C,D):= 0.99;
```
$$P(C, \mathrm{D}) := 0.99 \tag{12.1}$$

```
> P(C,Dp) := 0.5e-2;
```
$$P(C, Dp) := 0.005 \tag{12.2}$$

```
> P(D) := 0.009:
> P(Dp):=1-P(D):
> P(C) = P(C,D)*P(D) + P(C,Dp)*P(Dp);
```
$$P(C) = 0.013865 \tag{12.3}$$

(b) C': inspetor identifica item como sendo bom
P(D'| C') = P(C'|D') P(D')/(P(C'|D') P(D') + P(C'|D) P(D))

```
> P(Dp,Cp):=P(Cp,Dp)*P(Dp)/(P(Cp,Dp)*P(Dp)+P(Cp,D)*P(D));
```
$$P(Dp, Cp) := \frac{0.991\, P(Cp, Dp)}{0.991\, P(Cp, Dp) + 0.009\, P(Cp, \mathrm{D})} \tag{12.4}$$

```
> P(Cp,D):=1-P(C,D);
```
$$P(Cp, \mathrm{D}) := 0.01 \tag{12.5}$$

```
> P(Cp,Dp):=1-P(C,Dp);
```
$$P(Cp, Dp) := 0.995 \tag{12.6}$$

```
> eval(P(Dp, Cp));
```
(12.7)

$$0.9999087342 \tag{12.7}$$

>