

Cálculo Vetorial - CVE

2007/2

Fernando Deeke Sasse

Curvas no Espaço, Superfícies e Planos Tangentes

Exercícios

1. Seja a superfície definida por pela equação $z - x - x^2 - x \cdot y + 3 = 0$. Determine o plano tangente a esta superfície que é perpendicular ao eixo z.

Solução:

```
[ delete(x);delete(y);delete(z)
```

```
[ F:= z - x*y-x^2-x+3;
```

```
[ z - x - x^2 - x · y + 3
```

```
[ N:=linalg::grad(F, [x, y, z])
```

```
[  $\begin{pmatrix} -x \cdot 2 - y - 1 \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}$ 
```

```
[ linalg: : B:=N-matrix([0, 0,1])
```

```
[  $\begin{pmatrix} -x \cdot 2 - y - 1 \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$ 
```

```
[ numeric::solve({B[1]=0,B[2]=0,B[3]=0}, {x, y, z})
```

```
[ {[x = 0.0, y = -1.0]}
```

```
[ x := 0; y := -1;
```

```
[ 0
```

```
[ -1
```

```
[ z:=solve(F, z);
```

```
[ {-3}
```

```
[ z:=-3;
```

```
[ -3
```

Portanto, o plano tangente é dado por

```
[ linalg::scalarProduct(matrix([0,0,1]), matrix([X-x,Y-y,Z-z]))=0
```

```
[  $\bar{Z} + 3 = 0$ 
```

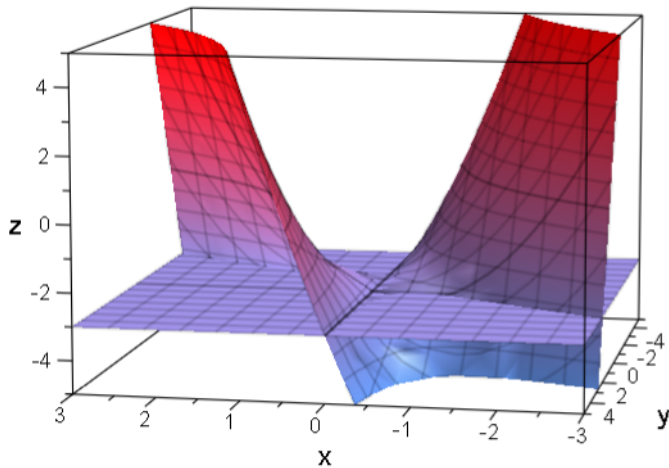
Vejam os gráficos desta solução.

```
[ delete(x);delete(y);delete(z)
```

```
[ plot(plot::Implicit3d(z - x*y-x^2-x+3,x=-3..3,y=-5..5,z=-5..5),
```

```
[ plot::Implicit3d(z+3,x=-3..3,y=-5..5,z=-5..5))
```





2. Uma partícula descreve uma trajetória definida por

$$r(t) = (t^3 + t^2 - t + 3, \sin(t), 4 \cdot \cos(t)) .$$

Determine no instante $t = 3$,

- (i) a velocidade e a aceleração da partícula,
- (ii) a aceleração centrípeta e a aceleração tangencial,
- (iii) a reta binormal,
- (iv) a curvatura,
- (v) o plano osculador.

Solução:

(i) O vetor posição é definido por

```
r:=matrix([t^6+t^2-t+3, sin(t), 4*cos(t)])
```

$$\begin{pmatrix} t^6 + t^2 - t + 3 \\ \sin(t) \\ 4 \cdot \cos(t) \end{pmatrix}$$

A velocidade é

```
v:=diff(r, t)
```

$$\begin{pmatrix} 6 \cdot t^5 + 2 \cdot t - 1 \\ \cos(t) \\ -4 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

e a aceleração,

```
a:=diff(v, t)
```

$$\begin{pmatrix} 30 \cdot t^4 + 2 \\ -\sin(t) \\ -4 \cdot \cos(t) \end{pmatrix}$$

Em $t=3$ temos

```
rp:=evalAt(r, t=3.0);vp:=evalAt(v, t=3.0);ap:=evalAt(a, t=3.0);
```

$$\begin{pmatrix} 738.0 \\ 0.1411200081 \\ -3.959969986 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1463.0 \\ -0.9899924966 \\ -0.5644800322 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1463.0 \\ -0.9899924966 \\ -0.5644800322 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2432.0 \\ -0.1411200081 \\ 3.959969986 \end{pmatrix}$$

(ii) A aceleração tangencial é dada pela projeção

```
at:=linalg::scalarProduct(ap, vp)/(linalg::scalarProduct(vp, vp))*vp
```

$$\begin{pmatrix} 2431.997092 \\ -1.645699845 \\ -0.9383552952 \end{pmatrix}$$

A aceleração centrípeta agora é dada por

```
ac:=ap-at;
```

$$\begin{pmatrix} 0.002908085825 \\ 1.504579837 \\ 4.898325282 \end{pmatrix}$$

(iii) A reta binormal tem a direção do vetor

```
B:= linalg::crossProduct(ap, vp)
```

$$\begin{pmatrix} 4.0 \\ 7166.251529 \\ -2201.20318 \end{pmatrix}$$

Portanto, as equações da reta binormal são:

```
reta:={X-rp[1]/B[1]=k, Y-rp[2]/B[2]=k, Z-rp[3]/B[3]=k}
```

$$\{Y - 0.00001969230462 = k, X - 184.5 = k, Z - 0.001799002483 = k\}$$

(iv) O quadrado da curvatura é dada por

```
ksq:=linalg::scalarProduct(B, B)/(linalg::scalarProduct(vp, vp))^3
```

$$5.731564959 \cdot 10^{-12}$$

de modo que

```
k:=sqrt(ksq)
```

$$0.000002394068704$$

3. Seja a curva definida pela intersecção das superfícies dadas por $z = x^2 + x \cdot y^2 + x - 3$ e

$z = y^2 + x + 3$. Determine a reta tangente a esta curva no ponto $(2, \sqrt{2}, 7)$.

```
Phi[1] := x*y^2+x^2+x-3-z; Phi[2]:= x+y^2+3-z ;
```

$$x^2 + x \cdot y^2 + x - z - 3$$

$$y^2 + x - z + 3$$

```
D1:=matrix([[diff(Phi[1],y),diff(Phi[1],z)],[diff(Phi[2],y),diff(Phi[2],z)]]);
```

```
D2:=matrix([[diff(Phi[1],z),diff(Phi[1],x)],[diff(Phi[2],z),diff(Phi[2],x)]]);
```

```
D3:=matrix([[diff(Phi[1],x),diff(Phi[1],y)],[diff(Phi[2],x),diff(Phi[2],y)]]);
```

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot x \cdot y & -1 \\ 2 \cdot y & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & y^2 + 2 \cdot x + 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y^2 + 2 \cdot x + 1 & 2 \cdot x \cdot y \\ 1 & 2 \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y^2 + 2 \cdot x + 1 & 2 \cdot x \cdot y \\ 1 & 2 \cdot y \end{pmatrix}$$

Seja

```
rp:=[2, sqrt(2), 7]
[2, sqrt(2), 7]
```

Calculemos os determinantes destas matrizes no ponto

```
D1p:=linalg::det(evalAt(D1, [x = rp[1], y=rp[2]]));
D2p:=linalg::det(evalAt(D2, [x = rp[1], y=rp[2]]));
D3p:=linalg::det(evalAt(D3, [x = rp[1], y=rp[2]]))
-2 * sqrt(2)
6
10 * sqrt(2)
```

A reta tangente é então dada por

```
reta:={(X-rp[1])/D1p=k, (Y-rp[2])/D2p=k, (Z-rp[3])/D3p=k}
{ Y/6 - sqrt(2)/6 = k, -sqrt(2) * (X-2)/4 = k, sqrt(2) * (Z-7)/20 = k }
```

Ilustremos graficamente a solução

```
retal := plot::Curve3d([k*D1p+rp[1], k*D2p+rp[2], k*D3p+rp[3]], k = -1..1)
plot::Curve3d([-sqrt(2) * k * 2 + 2, 6 * k + sqrt(2), 10 * sqrt(2) * k + 7], k = -1..1)
plotfunc3d(x*y^2+x^2+x-3, x+y^2+3, retal)
```

