Probabilidade e Estatística

2010/2

Prof. Fernando Deeke Sasse
CCT-UDESC

Prova 1 (II)

1. Em uma loteria 6 números são aleatoriamente selecionados de 40, sem substituição. Um apostador escolhe 6 números.
(a) Qual é a probabilidade do apostador acertar os 6 números?
(b) Qual é a probabilidade do apostador acertar 5 números?
(c) Qual é a probabilidade do apostador acertar 4 números?
(d) Se o jogador faz uma aposta semanal, qual é o número esperado de semanas até que o apostador acerte 6 números?

Solução

(a)

> $restart$

> $N := 40 : \ n := 6 : \ \ K := 6 : p := K/N :$

> $fhg := x \rightarrow evalf(\mathrm{binomial}(K, x) * \mathrm{binomial}(N-K, n-x) / \mathrm{binomial}(N, n))$

$$fhg := x \rightarrow evalf\left(\frac{\mathrm{binomial}(K, x)\ \mathrm{binomial}(N-K, n-x)}{\mathrm{binomial}(N, n)}\right) \quad \textbf{(1)}$$

(a)

> $fhg(6)$

$$2.605265763\ 10^{-7} \quad \textbf{(2)}$$

(b)

> $fhg(5)$

$$0.00005314742157 \quad \textbf{(3)}$$

(c)

> $fhg(4)$

$$0.002192331140 \quad \textbf{(4)}$$

>

(d)

> $\mathrm{mu} := \dfrac{1}{fhg(6)}$

$$\mu := 3.838380000\ 10^{6} \quad \textbf{(5)}$$

2. Teclados de computadores falham devido a defeitos em conexões elétricas (12%) ou defeitos mecânicos (88%). Defeitos mecânicos são relacionados teclas soltas (27%) ou montagem imprópria (73%). Defeitos em conexões elétricas são causados por defeitos em fios (35%), conexões impróprias (13%), ou fios mal soldados (52%).
(a) Determine a probabilidade de que uma falha seja devida a teclas soltas.
(b) Determine a probabilidade de que uma falha seja devida a conexões impróprias ou fios mal soldados.

Solução

Eventos: E: defeito em conexão elétrica, M: defeito em conexão mecânica, TS: defeito por tecla solta, MI: defeito por montagem imprópria, DF: defeitos em fios, CI: defeito por conexões impróprias, FM: defeito por fios mal soldados.

(a)

> $P(E) := 0.12 : P(M) := 0.88 : P(\text{"TS|M"}) := 0.27 : P(\text{"MI|M"}) := 0.73 : P(\text{"DF|E"}) := 0.35 : P(\text{"CI|E"}) := 0.13 : P(\text{"FM|E"}) := 0.52 :$

(a)

> $P(TS) := P(\text{"TS|M"}) \cdot P(M)$

$$P(TS) := 0.2376 \quad \textbf{(6)}$$

(b)

> $P(CI) := P(\text{"CI|E"}) \cdot P(E)$

$$P(CI) := 0.0156 \quad \textbf{(7)}$$

> $P(FM) := P(\text{"FM|E"}) \cdot P(E)$

$$P(FM) := 0.0624 \quad \textbf{(8)}$$

> $P(CI \cup FM) := P(CI) + P(FM)$

$$P(CI \cup FM) := 0.0780 \quad \textbf{(9)}$$

3. Considere um médico que tem o seguinte dilema: "Se eu estou 80% certo de que um paciente tem esta doença eu sempre recomendo a cirurgia e, quando eu não estou tão seguro, recomendo testes adicionais, que são caros e possivelmente dolorosos. Inicialmente eu estava 60% seguro de que o Sr. Silva tinha a doença, de modo que lhe recomendei fazer uma série de testes que sempre dá resultado positivo quando o
paciente tem a doença e quase nunca dá positivo quando o paciente não tem a doença. O teste deu resultado
positivo e eu estava pronto para recomendar a cirurgia quando o Sr. Silva me informou que era diabético.
Isso complicou as coisas, pois embora tal fato não altere minha estimativa inicial de 60% de suas chances
de ter a doença, ela afeta a interpretação dos resultados do teste. Isso acontece porque o teste, embora o teste nunca dê resultado positivo se o paciente é saudável, ele dá resultado positivo em 30% das vezes no caso de pacientes diabéticos sem a doença. O que devo fazer? Recomendar mais testes ou cirurgia?"

Solução

Eventos: E: paciente tem a doença, Y: teste dá resultado positivo.

> *restart* :

> $P(E) := 0.6; P(Ep) := 0.4$

$$P := E \rightarrow 0.6$$

$$P(Ep) := 0.4 \quad \textbf{(10)}$$

> $P(\text{"Y|Ep"}) := 0.3; P(\text{"Y|E"}) := 1 - 0.3$

$$P(\text{"Y|Ep"}) := 0.3$$

$$P(\text{"Y|E"}) := 0.7 \quad \textbf{(11)}$$

> $P(\text{"E| Y"}) := \dfrac{P(\text{"Y|E"}) \cdot P(E)}{P(\text{"Y|E"}) \cdot P(E) + P(\text{"Y| Ep"}) \cdot P(Ep)}$

$$P(\text{"E| Y"}) := 0.6363636364 \quad \textbf{(12)}$$

Como esta probabilidade é menor que 0.8, mais testes são recomendados.

>

4. Um lote de 140 chips semicondutores é inspecionado através da inspeção de 5 peças. Suponha que 10 chips não satisfaçam as exigências do cliente.

(a) Quantas diferentes amostras são possíveis?
(b) Quantas amostras contêm exatamente um chip fora de conformidade?
(c) Quantas amostras contêm exatamente ao menos um chip fora de conformidade?
Solução
(a)
d: chip com defeito, b: chip bom
N0: (ddddd),
N1: (ddddb), (dddbd), (ddbdd), (dbddd), (bdddd)
N2: (dddbb), ...
N3: (ddbbb), ...
N4: (dbbbb), ...
N5: (bbbbb)

> $restart$

> $N0 := 1$

$$N0 := 1 \tag{13}$$

> $N1 := \frac{5!}{4! \cdot 1!}$

$$N1 := 5 \tag{14}$$

> $N2 := \frac{5!}{3! \cdot 2!}$

$$N2 := 10 \tag{15}$$

> $N3 := \frac{5!}{2! \cdot 3!}$

$$N3 := 10 \tag{16}$$

> $N4 := \frac{5!}{1! \cdot 4!}$

$$N4 := 5 \tag{17}$$

> $N5 := 1;$

$$N5 := 1 \tag{18}$$

> $N := N0 + N1 + N2 + N3 + N4 + N5$

$$N := 32 \tag{19}$$

>

Ou seja, há 32 diferentes amostras possíveis.

(b) Há N4 = 5 amostras com 1 chip fora de conformidade.

(c) Há 31 amostras diferentes com ao menos um chip defeituoso.

5. No seu percurso para a universidade é observado que a luz de um dado semáforo está verde 20% da vezes em que você se aproxima dele. Suponha que cada manhã representa um experimento independente.
(a) Em quatro manhãs, qual é a probabilidade de que a luz esteja verde em exatamente um dia?
(b) Em 20 manhãs, qual é a probabilidade de que a luz esteja verde em exatamente 4 dias?
(c) Em 20 manhãs, qual é a probabilidade de que a luz esteja verde em 4 dias ou mais?
(d) Qual é a probabilidade de que a luz fique verde pela primeira vez na quarta manhã?
(f) Qual é a probabilidade de que a luz não fique verde por 10 manhãs consecutivas?

Solução

(a)

> $restart$

> $Pb := (x, n) \rightarrow \text{binomial}(n, x)\ p^x\ (1-p)^{n-x}:$

> $p := 0.2:$

> $Pb(1, 4)$

$$0.4096 \tag{20}$$

(b)

> $Pb(4, 20)$

$$0.2181994019 \tag{21}$$

(c)

> $1 - sum(Pb(x, 20), x = 0..3)$

$$0.5885511380 \tag{22}$$

> $sum(Pb(x, 20), x = 4..20)$

$$0.5885511380 \tag{23}$$

(d) Temos aqui uma distribuição geométrica:

> $fg := x \rightarrow (1-p)^{x-1}\ p$

$$fg := x \rightarrow (1-p)^{x-1}\ p \tag{24}$$

> $fg(4)$

$$0.1024 \tag{25}$$

(f)

> $fg(11)$

$$0.02147483648 \tag{26}$$