EST0003, 2009/2
PROVA 1

Prof. Fernando Deeke Sasse

1. Considere a seguinte distribuição de probabilidade acumulada:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -10\,, \\ 0.25 & -10 \le x < 30\,, \\ 0.75 & 30 \le x < 50\,, \\ 1 & 50 \le x\,. \end{cases}$$

Determine as seguintes probabilidades:
(a) $P(X \le 50)$, (b) $P(X \le 40)$, (c) $P(40 \le X \le 60)$, (d) $P(X < 0)$,
(e) $P(0 \le X \le 10)$.

Solução

The **cumulative distribution function** of a discrete random variable X, denoted as $F(x)$, is

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} f(x_i)$$

For a discrete random variable X, $F(x)$ satisfies the following properties.

$$\begin{aligned} &(1) \quad F(x) = P(X \le x) = \textstyle\sum_{x_i \le x} f(x_i) \\ &(2) \quad 0 \le F(x) \le 1 \\ &(3) \quad \text{If } x \le y, \quad \text{then } F(x) \le F(y) \end{aligned} \qquad (3\text{-}2)$$

(a) $P(X \le 50) = 1$
(b) $P(X \le 40) = 0.75$
(c) $P(40 \le X \le 60) = 0.25$
(d) $P(X < 0) = 0.25$
(e) $P(0 \le X \le 10) = 0$

2. Suponha que a variável aleatória X pode tomar valores 1/8, 1/5, 1/4, 3/8, com probabilidades 0.2, 0.4, 0.1, 0.3, respectivamente. Determine a média e a variância de X.

Solução

> $X := \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right]:$

> $f := [0.2, 0.4, 0.1, 0.3]:$

> $\mathrm{mu} := sum(X[k] \cdot f[k], k = 1 .. nops(X))$

$$\mu := 0.2425000000 \qquad \textbf{(1)}$$

> $V := sum\big((X[k] - \mathrm{mu})^2 \cdot f[k], k = 1 .. nops(X)\big)$

(2)

$$V := 0.008756250000 \quad (2)$$

>

3. Amostras de uma peça moldada de alumínio são classificadas com base no acabamento da superfície e acabamento da borda. Os resultados envolvendo 100 partes são sumarizados como segue:

		acabamento da borda	
		excelente	bom
acabamento da superfície	excelente	80	2
	bom	10	8

Denotando por A o evento correspondente a um acabamento de superfície excelente, e B o evento correspondente a um acabamento de borda excelente. Se uma parte é selecionada aleatoriamente, determine: $P(A)$, $P(A')$, $P(B)$, $P(A\cup B)$, $P(A\cap B)$, $P(B|A)$. $P(A'\cap B)$.

Solução

> $P(A) := \frac{82}{100}$

$$P(A) := \frac{41}{50} \quad (3)$$

> $P(Ap) := 1 - P(A)$

$$P(Ap) := \frac{9}{50} \quad (4)$$

> $P(A \cup B) := \frac{92}{100}$

$$P(A \cap B) := \frac{23}{25} \quad (5)$$

> $P(A \cap B) := \frac{80}{100}$

$$P(A \cap B) := \frac{4}{5} \quad (6)$$

> $P(B|A) := \frac{80}{82}$

$$P(B|A) := \frac{40}{41} \quad (7)$$

> $P(Ap \cap B) := \frac{10}{100}$

$$P(Ap \cap B) := \frac{1}{10} \quad (8)$$

4. A probabilidade de que um conector elétrico que é mantido seco falhe durante o período de garantia de um motor é 1%. Se o conector fica úmido esta probabilidade de falha sobe para 5%. Se 90% dos conectores são mantidos secos e 10% são mantidos úmidos, qual é a proporção de conectores que falham durante o período de garantia?

Solução
F : conector falha
H: conector é úmido
S: conector é seco

$P(F) = P(F\,|\,H)\cdot P(H) + P(F\,|\,S)\cdot P(S)$

> $restart$:

> $P(F) := P(F|H)\cdot P(H) + P(F|S)\cdot P(S)$

$$P(F) := P(F|H)\ P(H) + P(F|S)\ P(S) \tag{9}$$

> $P(H) := 0.1 : P(S) := 0.9 : P(F|H) := 0.05 : P(\text{`}F|S\text{`}) := 0.01$:

> $P(F)$

$$P(F|H)\ P(H) + P(F|S)\ P(S) \tag{10}$$

> %

$$0.014 \tag{11}$$

5. Placas de circuito impresso são testadas. Um lote contém 140 peças e 20 são selecionadas, sem substituição, para teste.
(a) Se 20 placas são defeituosas, qual é a probabilidade de que ao menos 1 placa defeituosa ocorra na amostra?
(b) Se 5 placas são defeituosas, qual é a probabilidade de que ao menos 1 placa defeituosa apareça na amostra?

Solução

A set of N objects contains
K objects classified as successes
$N - K$ objects classified as failures

A sample of size n objects is selected randomly (without replacement) from the N objects, where $K \le N$ and $n \le N$.

Let the random variable X denote the number of successes in the sample. Then X is a hypergeometric random variable and

$$f(x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad x = \max\{0, n + K - N\} \text{ to } \min\{K, n\} \tag{3-13}$$

(a) X: placa é defeituosa, variável aleatória hipergeométrica

> $fhg := x \rightarrow evalf(\text{binomial}(K, x) * \text{binomial}(N\text{-}K, n\text{-}x) / \text{binomial}(N, n))$;

$$fhg := x \rightarrow evalf\left(\frac{\text{binomial}(K, x)\ \text{binomial}(N - K, n - x)}{\text{binomial}(N, n)}\right) \tag{12}$$

> $K := 20; N := 140; n := 20$

$$K := 20$$
$$N := 140$$
$$n := 20 \tag{13}$$

> $sum(fhg(x), x = 1..20)$

$$0.9643816291 \quad (14)$$

> $1 - fhg(0)$

$$0.9643816292 \quad (15)$$

(b)

> $K := 5;$

$$K := 5 \quad (16)$$

> $1 - fhg(0)$

$$0.5429405761 \quad (17)$$

6. Resolva o problema anterior supondo que as seleções agora são feitas *com substituição*.

Solução

(a)

> *restart*

> $with(Statistics):$

> $p := \frac{20}{140}; n := 20;$

$$p := \frac{1}{7}$$

$$n := 20 \quad (18)$$

> $Pb := x \rightarrow \mathrm{binomial}(n, x)\, p^x\, (1-p)^{n-x}$

$$Pb := x \rightarrow \mathrm{binomial}(n, x)\, p^x\, (1-p)^{n-x} \quad (19)$$

> $evalf(1 - Pb(0))$

$$0.9541790375 \quad (20)$$

(b)

> $p := \frac{5}{140};$

$$p := \frac{1}{28} \quad (21)$$

> $evalf(1 - Pb(0))$

$$0.5168136507 \quad (22)$$

7. Em um estudo clínico, voluntários são testados para um gene que é associado ao risco de uma certa doença. A probabilidade de que a pessoa tenha um gene é 0.1.

(a) Qual é a probabilidade de que 4 ou mais pessoas tenham que ser testadas até que duas pessoas com o gene sejam detectadas?

(b) Qual é o valor esperado de pessoas que devem ser testadas até que duas pessoas com o gene sejam detectadas?

In a series of Bernoulli trials (independent trials with constant probability p of a success), let the random variable X denote the number of trials until r successes occur. Then X is a **negative binomial random variable** with parameters $0 < p < 1$ and $r = 1, 2\ 3, \ldots$, and

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r}p^r \qquad x = r, r+1, r+2, \ldots \qquad \text{(3-11)}$$

If X is a negative binomial random variable with parameters p and r,

$$\mu = E(X) = r/p \qquad \text{and} \qquad \sigma^2 = V(X) = r(1-p)/p^2$$

(a)

> $restart$

> $Pbn := x \rightarrow \mathrm{binomial}(x-1, r-1)\, p^r\, (1-p)^{x-r}:$

> $r := 2; p := 0.1$

$$r := 2$$
$$p := 0.1 \qquad \mathbf{(23)}$$

> $1 - sum(Pbn(x), x = 2..3)$

$$0.9720000000 \qquad \mathbf{(24)}$$

(b)

> $\mathrm{mu} := \frac{r}{p}$

$$\mu := 20.00000000 \qquad \mathbf{(25)}$$