

## Método da variação dos parâmetros

Notas complementares para o vídeo: <http://www.youtube.com/watch?v=gnlG6bCd9s4>

Fernando Deeke Sasse

Resolva o problema de valor inicial

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = 2x^4 e^x, \quad y'(1) = 0, \quad y(1) = 1.$$

### Solução

Resolvamos este problema através do método da variação dos parâmetros. A parte homogênea é  $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$ , que é uma equação de Euler-Cauchy. A equação característica associada é

$$m(m-1) - 3m + 3 = 0$$

ou

$$m^2 - 4m + 3 = 0.$$

Portanto,

$$m_{\pm} = \frac{1}{2} (4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}) = 2 \pm 1 = 3, 1.$$

e duas soluções linearmente independentes da equação homogênea são dadas por

$$y_1 = x^3 \quad \text{e} \quad y_2 = x.$$

A solução geral da equação homogênea é

$$x_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 x^3 + C_2 x.$$

A solução geral para a EDO na forma padrão

$$y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{3}{x^2} y = 2x^2 e^x$$

é dada por

$$x(t) = u_1(t) y_1 + u_2(t) y_2.$$

com

$$u_1 = - \int \frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + C_1, \quad u_2 = \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + C_2.$$

No presente caso,

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^3 & x \\ 3x^2 & 1 \end{vmatrix} = x^3 - 3x^3 = -2x^3.$$
$$f(x) = 2x^4 e^x.$$

Portanto,

$$u_1 = - \int \frac{x 2x^2 e^x}{-2x^3} dx + C_1 = \int e^x dx + C_1 = e^x + C_1.$$

$$u_2 = \int \frac{x^3 2x^2 e^x}{-2x^3} dx + C_2 = - \int x^2 e^x dx + C_2 = -(2 - 2x + x^2) e^x + C_2.$$

Portanto, a solução geral é dada por

$$y = u_1(t) y_1 + u_2(t) y_2 = (e^x + C_1) x^3 + (-(2 - 2x + x^2) e^x + C_2) x$$
$$= -2x e^x + 2x^2 e^x + x C_2 + x^3 C_1$$

Apliquemos as condições iniciais. Notemos antes que

$$y' = -2e^x + 2x e^x + 2x^2 e^x + C_2 + 3x^2 C_1.$$

Portanto,

$$y(1) = 1 = -2e + 2e + C_2 + C_1 = C_2 + C_1$$

$$y'(1) = 0 = -2e + 2e + 2e + C_2 + 3 C_1 = 2e + C_2 + 3 C_1,$$

ou seja,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 3 C_1 + C_2 = -2e \end{cases}$$

e

$$C_1 = -e - \frac{1}{2}, C_2 = e + \frac{3}{2}.$$

Portanto, a solução do problema de valor inicial é dada por

$$y = -2 x e^x + 2 x^2 e^x + x^3 \left( -e - \frac{1}{2} \right) + x \left( e + \frac{3}{2} \right)$$

Resolvendo este problema diretamente no Maple obtemos

```
> eq:=x^2*diff(y(x),x$2)-3*x*diff(y(x),x)+3*y(x)=2*x^4*exp(x);
```

$$eq := x^2 \left( \frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) - 3 x \left( \frac{d}{dx} y(x) \right) + 3 y(x) = 2 x^4 e^x \quad (1)$$

```
> sol:=dsolve({eq,y(1)=1, D(y)(1)=0});
```

$$sol := y(x) = \left( 2 x e^x - 2 e^x + \frac{1}{2} x^2 (-1 - 2 e) + e + \frac{3}{2} \right) x \quad (2)$$

```
> y=expand(rhs(sol));
```

$$y = 2 x^2 e^x - 2 x e^x - \frac{1}{2} x^3 - x^3 e + x e + \frac{3}{2} x \quad (3)$$

o que coincide com o nosso resultado anterior.